

Моделирование вертикального распределения объектов плоской подсистемы Галактики

В.А. Усик,
И.И. Никифоров, А.В. Веселова

Санкт-Петербургский Государственный университет

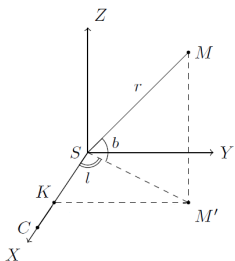
Современная звездная астрономия, САО РАН
9 октября 2019 г.

Введение

Цель работы — совместное определение дисперсии объектов галактической подсистемы и смещения Солнца относительно средней поверхности диска Галактики и построение модели этой поверхности с учетом её кривизны.

В предыдущих работах решались частные задачи по нахождению упомянутых характеристик, что может приводить к систематическим ошибкам результатов. Полная задача, сформулированная выше, ранее не решалась.

Модель средней поверхности диска Галактики



$$X = r \cos l \cos b,$$

$$Y = r \sin l \cos b,$$

$$Z = r \sin b.$$

В качестве общего вида модели ζ_n порядка n принято разложение функции $\zeta(X, Y) \equiv \bar{Z}(X, Y)$ в ряд Маклорена в окрестности Солнца

$$\zeta_n(X, Y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i z_{i-j,j} X^{i-j} Y^j = z_{00} + z_{10}X + z_{01}Y + \quad (1)$$
$$+ z_{20}X^2 + z_{11}XY + z_{02}Y^2 + \dots + z_{n0}X^n + \dots + z_{0n}Y^n.$$

Моделирование

Вектор параметров \vec{Z} — параметры z_{ij} в порядке их написания в разложении (1).

Оптимизация отклонений по Z :

$$\sum_{i=1}^N \Delta Z_i^2 \rightarrow \min, \quad \Delta Z_i \equiv Z_i - \zeta_n(X_i, Y_i), \quad (2)$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta Z^2}{2\sigma_z^2}}.$$

Оптимизация отклонений по ρ :

$$\sum_{i=1}^N \rho_i^2 \rightarrow \min, \quad f(\rho) = \frac{1}{\sigma_\rho \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2}}, \quad (3)$$

где ρ_i — отклонение i -го объекта от модели ζ_n средней поверхности диска Галактики по нормали к модели.

Метод наименьших квадратов

$$A\vec{z} = \vec{Z}, \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^N \Delta Z_i^2, \quad (4)$$

где σ_z — стандартное отклонение, N — количество уравнений, k — количество параметров, A — матрица избыточной системы.

$$C = \sigma_z^2 (A^T A)^{-1}, \quad \vec{z}_{\text{err}} = \{ \sqrt{C_{ii}} \}_{i=1}^k, \quad (5)$$

где C — ковариационная матрица, \vec{z}_{err} — вектор ошибок параметров.

$$\sigma_{\sigma_z} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2(N-k)}}, \quad \vec{a}(X, Y) = \{ X^{i-j} Y^j \}_{i=0}^n \quad j=0, \quad (6)$$
$$\sigma_{\zeta_n}(X, Y) = \sigma_z \sqrt{\vec{a}^T(X, Y) C \vec{a}(X, Y)},$$

где $\vec{a}(X, Y)$ — строка матрицы A в данной точке, $\sigma_{\zeta_n}(X, Y)$ — стандартная неопределенность модели ζ_n в точке (X, Y) .

Метод наибольшего правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\rho} e^{-\frac{\rho_i^2}{2\sigma_\rho^2}}, \quad (7)$$

$$\mathcal{L} = -\ln L = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + N \ln \sigma_\rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i^2}{\sigma_\rho^2}.$$

$$H(\mathcal{L})_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z_i \partial z_j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k, \quad (8)$$

$$C = H^{-1}, \quad \vec{z}_{\text{err}} = \left\{ \sqrt{C_{ii}} \right\}_{i=1}^k,$$

где $H(\mathcal{L})$ — матрица Гессе, $\sigma_\rho = z_1$.

$$\sigma_{\zeta_n}(X, Y) = \sigma_\rho \sqrt{\vec{a}^T(X, Y) C \vec{a}(X, Y)}. \quad (9)$$

Термины

Полная выборка — выборка, составленная из всех объектов каталога классических цефеид Бердникова и др. (2000) в версии Mel'nik et al. (2015), $N = 674$.

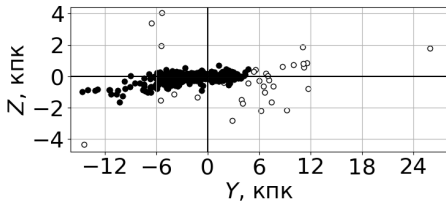
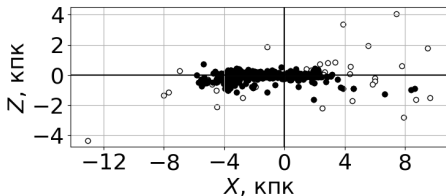
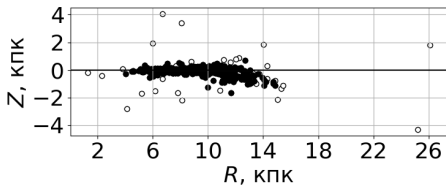
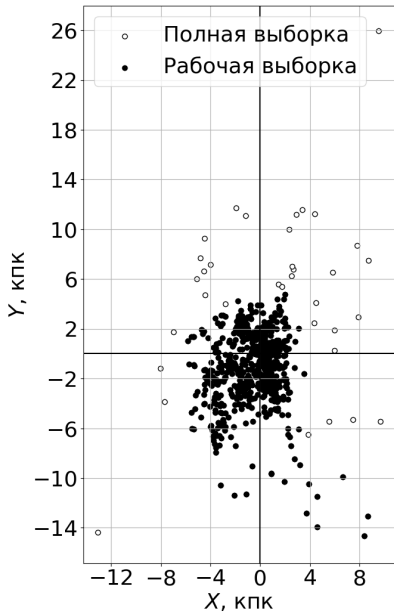
Рабочая выборка — полная выборка за исключением явно изолированных объектов и объектов, величины Z которых не согласуются с вертикальным масштабом.

Рабочая выборка без выбросов — рабочая выборка после применения алгоритма устранения выбросов в данных.

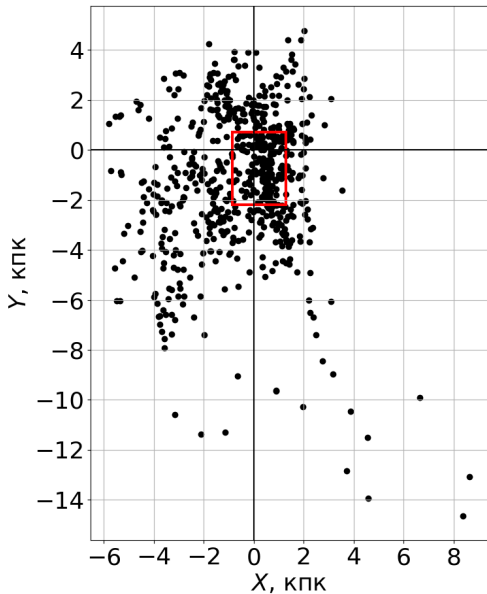
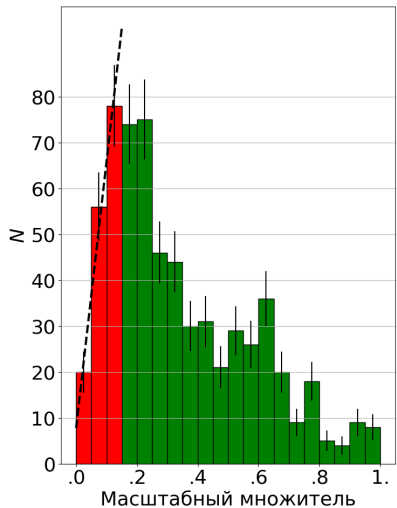
Локальная выборка — часть рабочей выборки, представляющая наибольшую окрестность Солнца со свойством относительной полноты выявления опорных объектов.

Локальная выборка без выбросов — локальная выборка после применения алгоритма устранения выбросов в данных.

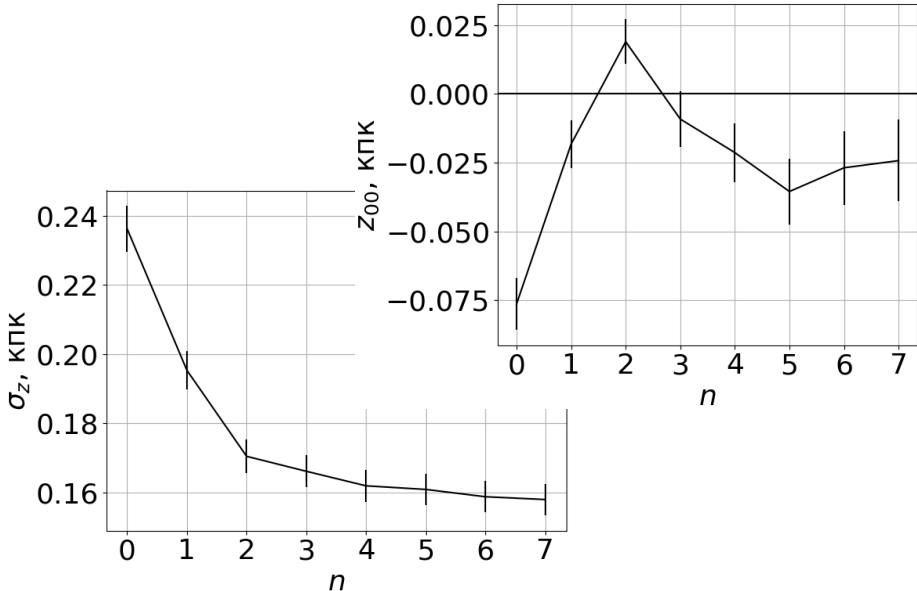
Данные. Рабочая выборка, $N = 639$



Данные. Локальная выборка, $N = 154$

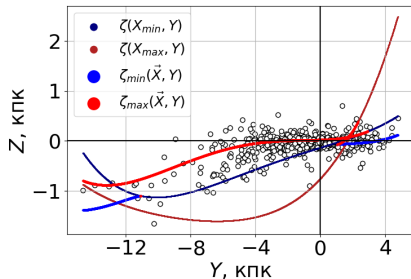
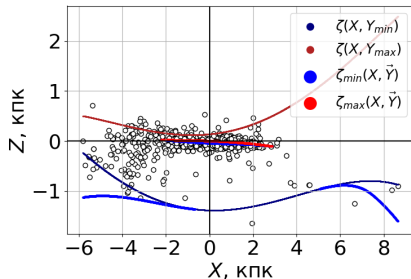
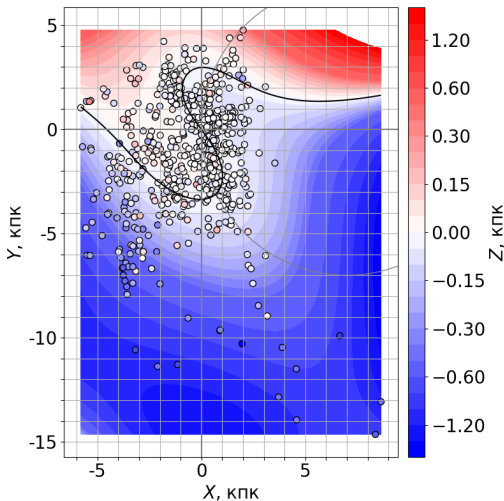


Результаты. Рабочая выборка, $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min$

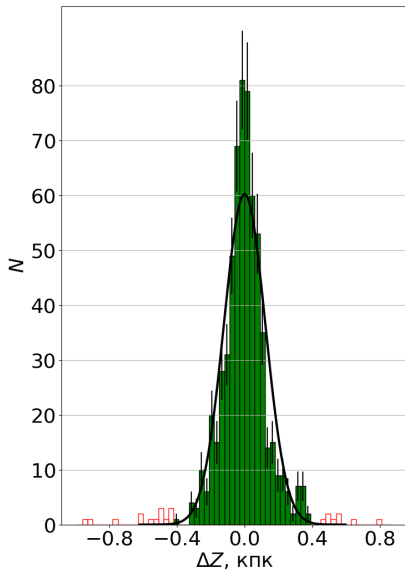
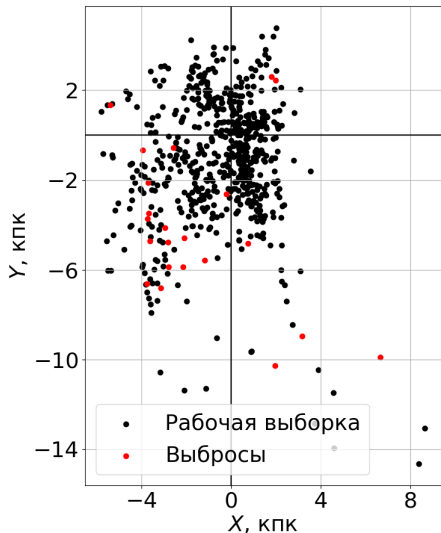


Результаты. Рабочая выборка, $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min$,

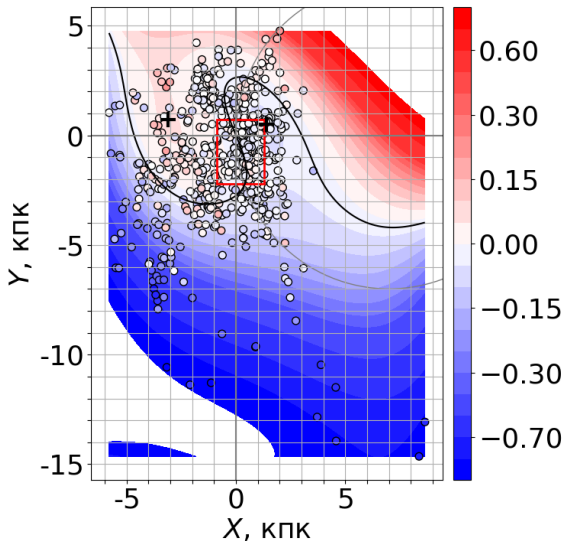
$n = 4$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $N = 617$, $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min$, $n = 4$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min, n = 4$



Локальный максимум ζ_4 :

$$X = -3.10 \text{ кпк},$$

$$Y = 0.72 \text{ кпк},$$

$$\zeta_4 = 54.0 \pm 15.0 \text{ пк},$$

$$\frac{\zeta_4 - z_{00}}{\sigma_{\zeta_4}} = 5.13.$$

Локальный минимум ζ_4 :

$$X = 1.38 \text{ кпк},$$

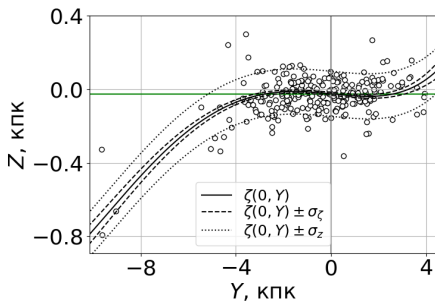
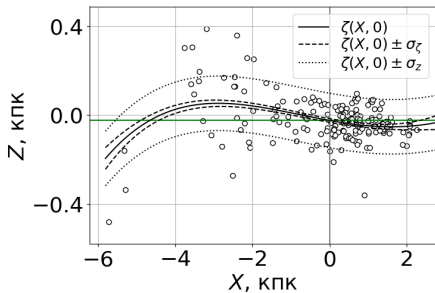
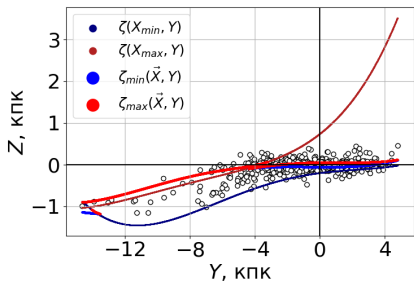
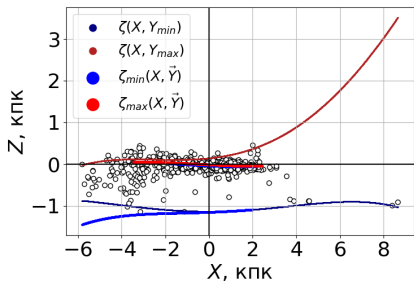
$$Y = 0.52 \text{ кпк},$$

$$\zeta_4 = -54.3 \pm 11.0 \text{ пк},$$

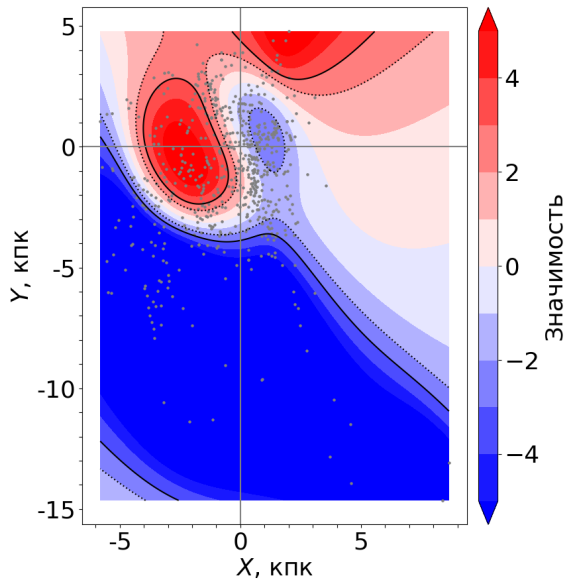
$$\frac{\zeta_4 - z_{00}}{\sigma_{\zeta_4}} = -2.63.$$

Результаты. Рабочая выборка без выбросов,

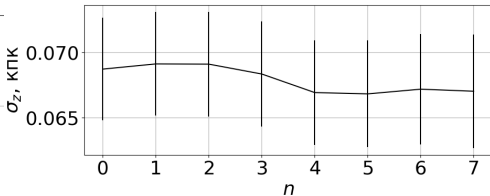
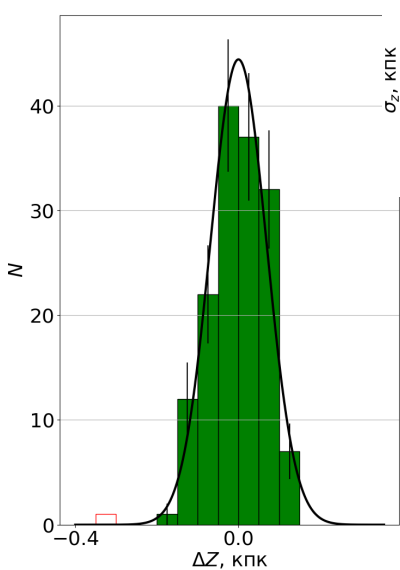
$$\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min, n = 4$$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min, n = 4$



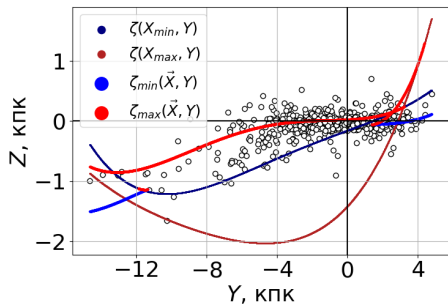
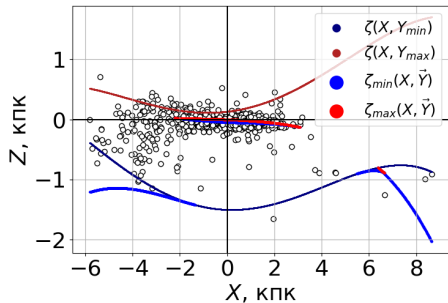
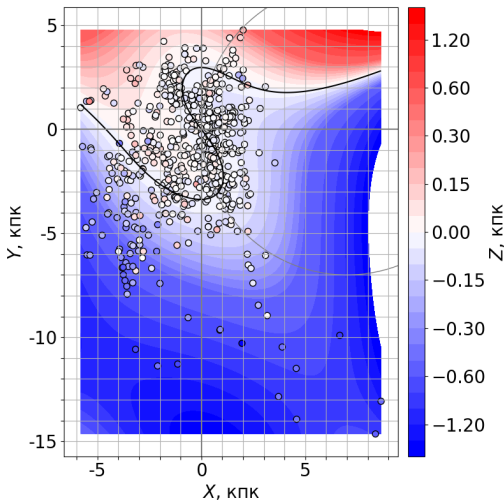
Результаты. Локальная выборка без выбросов,
 $N = 153$, $\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min$, $n = 0$



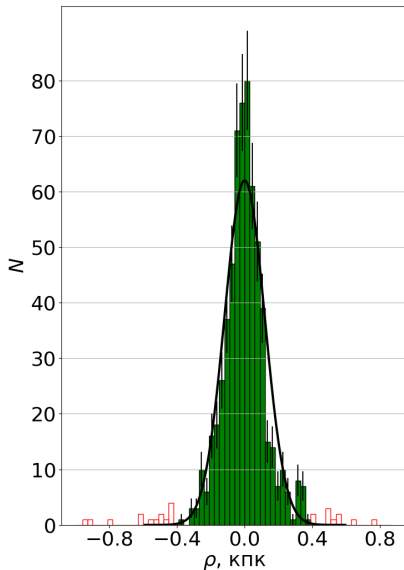
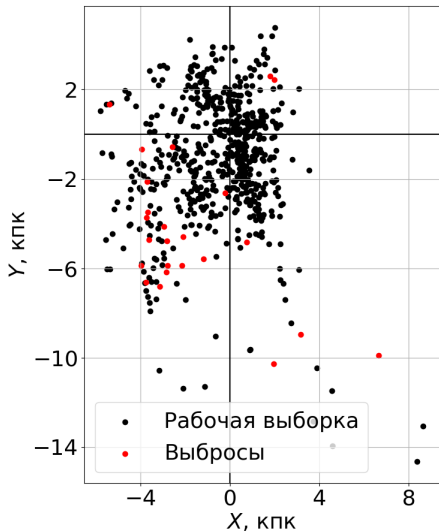
Критерий согласия Пирсона дает основания считать гипотезу верной только в случае локальной выборки без выбросов (вероятность случайной реализации 44%). Считается, что гипотеза может быть принята при величине вероятности, превышающей 5%.

Результаты. Рабочая выборка, $\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min$,

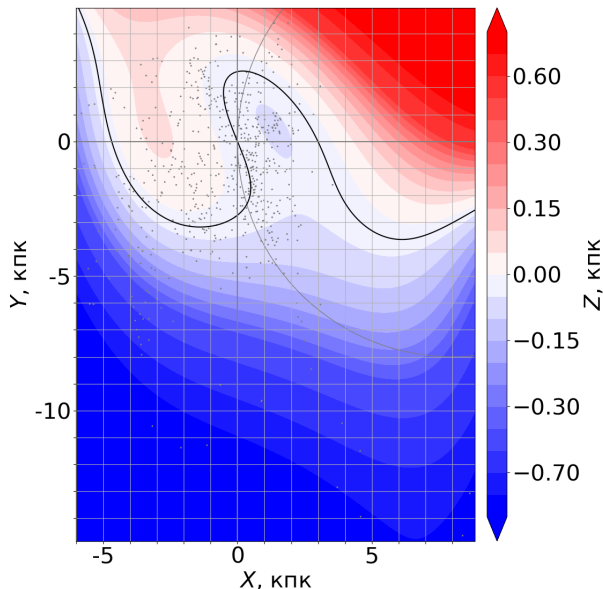
$n = 4$



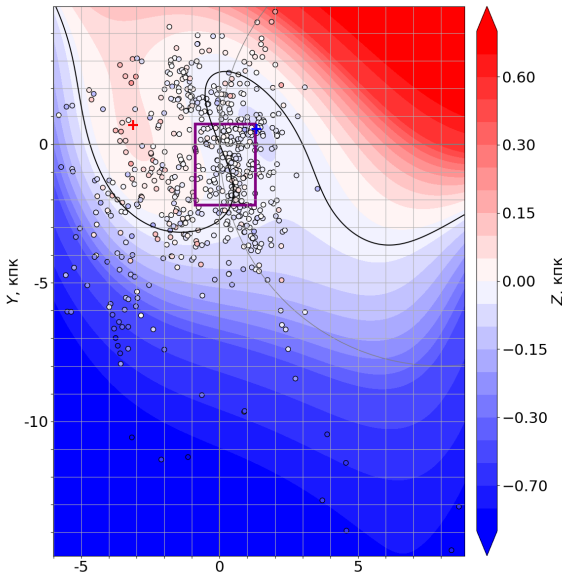
Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $N = 615$, $\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min$, $n = 4$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $N = 615$, $\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min$, $n = 4$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов, $\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min, n = 4$



Локальный максимум ζ_4 :

$$X = -3.11 \text{ кпк,}$$

$$Y = 0.64 \text{ кпк,}$$

$$\zeta_4 = 58.4 \pm 15.0 \text{ пк,}$$

$$\frac{\zeta_4 - z_{00}}{\sigma_{\zeta_4}} = 5.43.$$

Локальный минимум ζ_4 :

$$X = 1.38 \text{ кпк,}$$

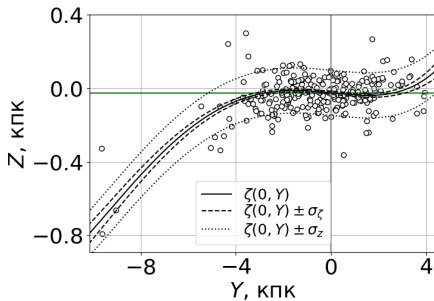
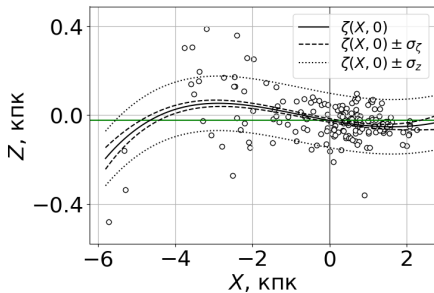
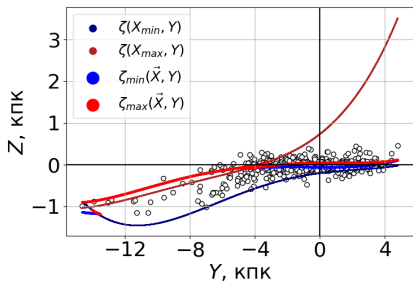
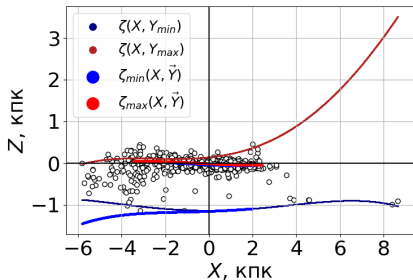
$$Y = 0.56 \text{ кпк,}$$

$$\zeta_4 = -55.0 \pm 11.0 \text{ пк,}$$

$$\frac{\zeta_4 - z_{00}}{\sigma_{\zeta_4}} = -2.81.$$

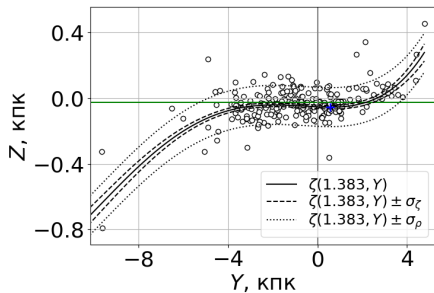
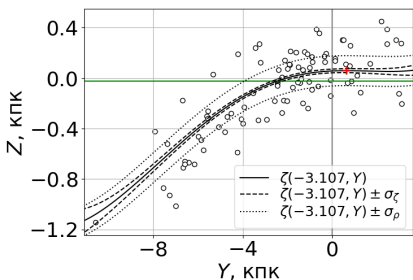
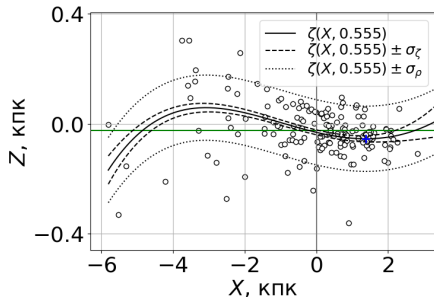
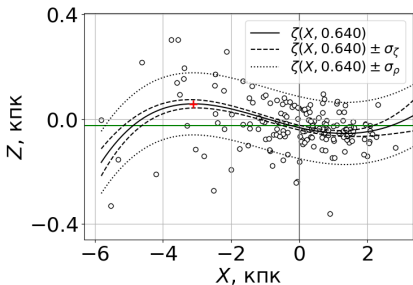
Результаты. Рабочая выборка без выбросов,

$$\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min, n = 4$$

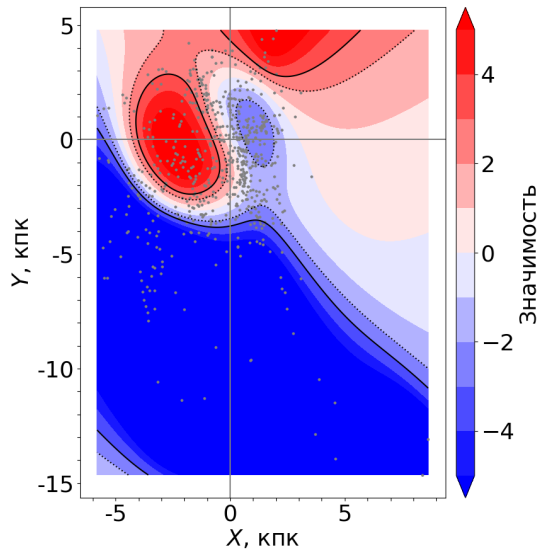


Результаты. Рабочая выборка без выбросов,

$$\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min, n = 4$$



Результаты. Рабочая выборка без выбросов,
 $\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min, n = 4$



Результаты I

$$\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min$$

N	617	153
σ_z	0.1226 ± 0.0035	0.0687 ± 0.0039
z_{00}	-0.0249 ± 0.0082	-0.0252 ± 0.0055
...	...	

$$\sum_i \rho_i^2 \rightarrow \min$$

N	615
σ_ρ	0.1187 ± 0.0033
z_{00}	-0.0243 ± 0.0079
...	...

Результаты II

При моделировании по ρ , учитывая наличие значимых экстремумов, можно вычислить величину ρ_{\odot} — расстояние от Солнца до средней поверхности Галактики. Это в свою очередь позволяет оценить угол наклона локальной средней поверхности диска Галактики к номинальной плоскости:

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\rho_{\odot}}{z_{\odot}} \right) = 1.79_{-0.33}^{+0.34} \text{ град.}$$

Статистическая неопределенность угла γ была найдена методом Монте-Карло по 50 псевдокаталогам, сформированным для модели 4-го порядка рабочей выборки без выбросов.

Результаты III

Калибровка каталога (Бердников, 1996)

$$d_{\text{LMC}} = 18.25 \pm 0.05 \text{ зв. вел.}$$

Современная калибровка (de Grijs, 2014)

$$d_{\text{LMC}} = 18.49 \pm 0.09 \text{ зв. вел.},$$

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 10^{0.2\Delta d} = 1.117^{+0.053}_{-0.050}.$$

Локальные оценки:

$$z_{\odot} = 25.2 \pm 5.5 \text{ пк} \rightarrow z_{\odot} = 28.1 \pm 6.1 \left|_{\text{stat}}^{+1.3} \right|_{\text{cal}}^{-1.3} \text{ пк},$$

$$\sigma_{\rho} = 68.5 \pm 3.9 \text{ пк} \rightarrow \sigma_{\rho} = 76.5 \pm 4.4 \left|_{\text{stat}}^{+3.6} \right|_{\text{cal}}^{-3.4} \text{ пк}.$$

Нелокальные оценки:

$$z_{\odot} = 24.3 \pm 7.9 \text{ пк} \rightarrow z_{\odot} = 27.1 \pm 8.8 \left|_{\text{stat}}^{+1.3} \right|_{\text{cal}}^{-1.2} \text{ пк},$$

$$\sigma_{\rho} = 118.2 \pm 3.3 \text{ пк} \rightarrow \sigma_{\rho} = 132.0 \pm 3.7 \left|_{\text{stat}}^{+6.3} \right|_{\text{cal}}^{-5.9} \text{ пк}.$$

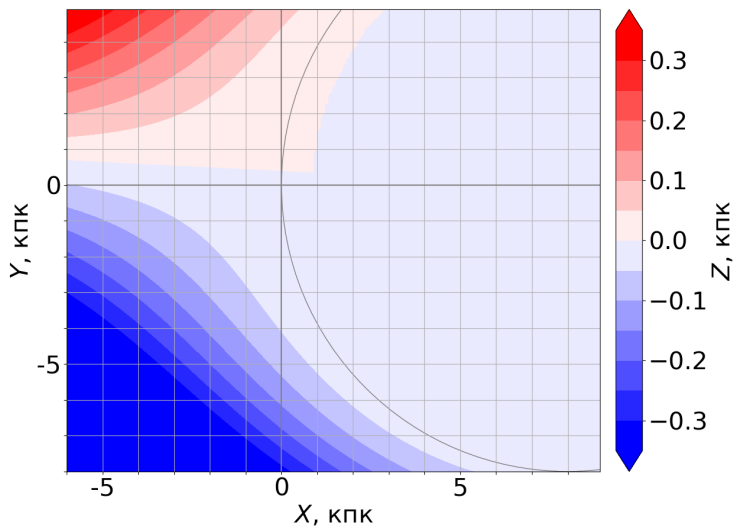
Заключение

- Получена нелокальная оценка смещения Солнца $z_{\odot} = 27.1 \pm 8.8 \Big|_{\text{stat}}^{+1.3} \Big|_{\text{cal}}^{-1.2}$ пк и локальная оценка этого параметра $z_{\odot} = 28.1 \pm 6.1 \Big|_{\text{stat}} \pm 1.3 \Big|_{\text{cal}}$ пк. Они согласуются в пределах неопределенности между собой и с современной наилучшей оценкой $z_{\odot} = 25 \pm 5$ пк.
- Нелокальная оценка вертикального стандартного отклонения классических цефеид $\sigma_{\rho} = 132.0 \pm 3.7 \Big|_{\text{stat}}^{+6.3} \Big|_{\text{cal}}^{-5.9}$ пк и локальная оценка этого параметра $\sigma_{\rho} = 76.5 \pm 4.4 \Big|_{\text{stat}}^{+3.6} \Big|_{\text{cal}}^{-3.4}$ пк значительно отличаются, что ставит вопрос о необходимости учета ошибок в измерении расстояний, использования более сложных моделей вертикального распределения вне окрестности Солнца, возможной зависимости дисперсии от расстояния до центра Галактики.

Заключение

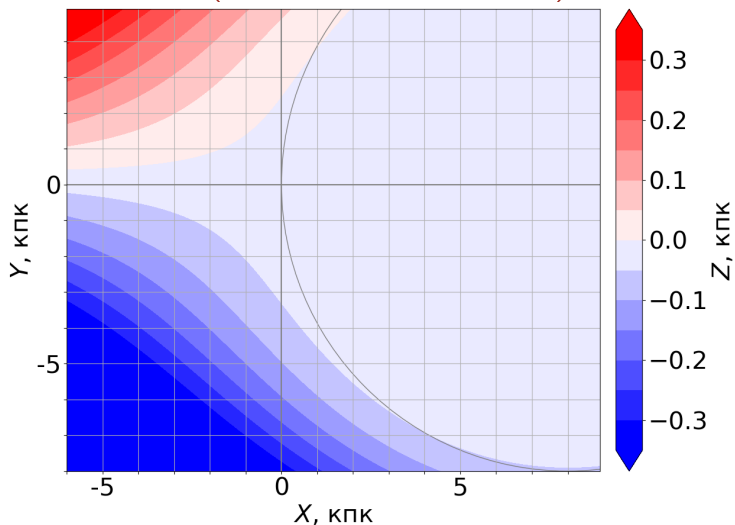
- Построена новая модель области средней поверхности диска Галактики, представленной данными о классических цефеидах. Модель показывает наличие значимых локальных экстремумов — минимума в I квадранте и максимума во II квадранте. Подтверждается ранее известный результат о понижении средней поверхности диска Галактики в III квадранте. Оценен угол локального наклона средней поверхности диска Галактики к плоскости XU галактической системы координат $\gamma = 1.79_{-0.33}^{+0.34}$ град.
- Гипотеза о нормальном вертикальном распределении объектов не противоречит только наблюдательным данным об объектах локальной выборки без выбросов. Это является еще одним аргументом в пользу введения более сложной модели вертикального распределения, а также учета факторов, искажающих наблюдаемое вертикальное распределение.

Другая модель (Chen++, 2019)



$$\zeta_m = \begin{cases} A_m(R - R_m)^{B_m} \sin(\phi - \phi_m), & R \geq R_m \\ Z_m, & R < R_m \end{cases}$$

Другая модель (Skowron++, 2018)



$$\zeta_m = \begin{cases} Z_m + A_m(R - R_m)^2 \sin(\phi - \phi_m), & R \geq R_m \\ Z_m, & R < R_m \end{cases}$$

Устранение выбросов

$$(1 - \psi(\chi_\gamma))N = \gamma, \quad \psi(\chi_\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\chi_\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Находится число объектов L с модулями невязок, превышающими χ_1 , если их больше L' , то нужно исключить $L - L'$ объектов с максимальными модулями невязок. В данной работе используется $L' = 3$, которое обусловлено тем, что вероятность случайного появления 4-х или больше выбросов приблизительно равна 2%. Модули невязок оставшихся объектов проверяются уже с величиной $\chi_{0.05}$ и удаляются при её превышении.

Если L изначально меньше L' , то эти объекты сразу проверяются по критерию с величиной $\chi_{0.05}$. Процесс повторяется итеративно до тех пор, пока либо L не будет изначально нулевым, либо за итерацию не будет исключено ни одного объекта. Важно отметить, что на каждой итерации параметры модели снова определяются для новой выборки.

Критерий согласия Пирсона

$$[x_{i-1}, x_i], \quad p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k N p_i = N.$$

$$P(U, \chi) = \frac{1}{2^{\chi/2} \Gamma(\chi/2)} \int_U^{\infty} t^{\chi/2-1} e^{-t/2} dt,$$

$$U = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - N p_i)^2}{N p_i}, \quad \chi = k - l - 1.$$

Здесь l — количество определяемых параметров модели, $P(U, \chi)$ — вероятность получения такого значения U для данной гипотезы при верности последней, Γ — гамма-функция. Чем больше эта вероятность, тем с большей уверенностью можно говорить о случайности отклонений величин m_i от $N p_i$ и о верности гипотезы в целом. Нельзя утверждать, что гипотеза верна, независимо от того, как велика вероятность. Считается, что при $P(U, \chi) > 0.05$ выборка не противоречит гипотезе.

Список литературы I

- [1] Агекян Т.А., Теория вероятностей для астрономов и физиков. Москва. 1974. 264 с.
- [2] Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К. Письма в Астрон. Журн. 1996. Т. 22. С. 936
- [3] Бобылев В.В., Байкова А.Т. Письма в Астрон. Журн. 2017. Т. 43. С. 341
- [4] Худсон Д., Статистика для физиков. Второе дополненное издание. Перевод с английского. Москва, 1970. 295 с.
- [5] Berdnikov L.N., Dambis A.K., Vozyakova O.V. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 2000. V. 143. P. 211
- [6] Bland-Hawthorn J., Gerhard O. Annual Rev. Astron. Astrophys. 2016 V. 54. P. 529
- [7] Bobylev V.V. Astron. Let. 2013. V. 39. P. 753

Список литературы II

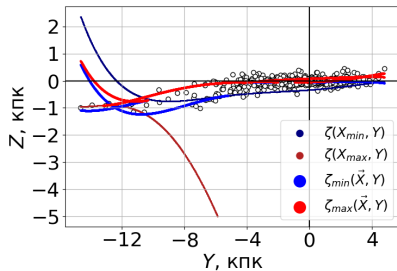
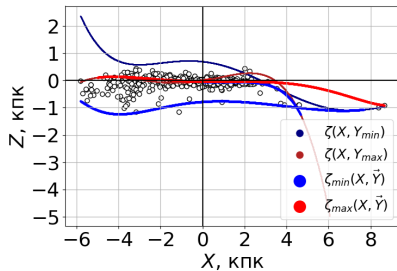
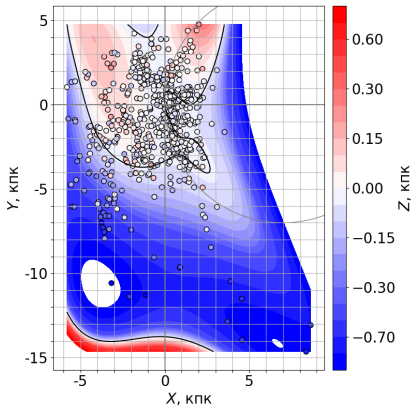
- [8] Bobylev V.V., Bajkova A.T. *Astron. Let.* 2016. V. 42. P. 1
- [9] Bobylev V.V., Bajkova A.T. *Astron. Let.* 2016. V. 42. P. 182
- [10] Buckner A. S. M., Froebrich D. *MNRAS.* 2014. M. 444. 3. 290
- [11] de Grijs R., Wicker J.E., Bono G. *Astron. J.* 2014. V. 147. P. 122
- [12] Jurić M., Ivezić Ž., Brooks A., Lupton R.H., Schlegel D., et al. *Astrophys. J.* 2008. V. 673. P. 864
- [13] Majaess D.J., Turner D.G., Lane D.J. *MNRAS.* 2009. V. 398. P. 263
- [14] Mel'nik A.M., Rautiainen P., Berdnikov L.N., Dambis A.K., Rastorguev A.S. *Astron. Nachr.* 2015. V. 336. P. 70

Список литературы III

- [15] Nikiforov I.I. *Astron. Astrophys. Trans.* 2012. V. 27. P. 537
- [16] Oort J.H., Kerr F.J., Westerhout G. *MNRAS*. 1958. V. 118. P. 379
- [17] Pohl M., Englmaier P., Bissantz N. *Astrophys. J.* 2008. V. 677. P. 283
- [18] van Tulder J.J.M., *Bull. Astron. Inst. Netherlands*. 1942. V. 9. P. 315
- [19] Wall J.W., Jenkins C.R., *Practical statistics for astronomers. Second Edition.* New York: Cambridge University Press. 2012 (reprinted 2014). xix+353 p.
- [20] Yao J.M., Manchester R.N., Wang N. *MNRAS*, 2017. V. 468. P. 3289

Результаты. Рабочая выборка без выбросов,

$$\sum_i \Delta Z_i^2 \rightarrow \min, n = 5$$



Таблицы I

4-й порядок, МНК

Параметр, 16	Цефеиды, 639	Доля
σ_z	0.1618 ± 0.0045	0.03
z_{00}	-0.021 ± 0.010	0.48
z_{10}	-0.0245 ± 0.0082	0.33
z_{01}	-0.0182 ± 0.0054	0.30
z_{20}	-0.0010 ± 0.0032	3.20
z_{02}	-0.0002 ± 0.0014	7.00
z_{11}	-0.0008 ± 0.0023	2.88
z_{30}	0.0003 ± 0.0011	3.67
z_{03}	0.00186 ± 0.00037	0.20
z_{21}	0.0040 ± 0.0012	0.30
z_{12}	0.00234 ± 0.00072	0.31
z_{40}	-0.00012 ± 0.00016	1.33
z_{04}	0.000092 ± 0.000026	0.28
z_{31}	0.00011 ± 0.00018	1.64
z_{22}	0.00041 ± 0.00013	0.32

Таблицы II

4-й порядок, МНК

Параметр, 16	Цефеиды, 617	Доля
σ_z	0.1226 \pm 0.0035	0.03
z_{00}	-0.0249 \pm 0.0082	0.33
z_{10}	-0.0310 \pm 0.0063	0.20
z_{01}	-0.0127 \pm 0.0041	0.32
z_{20}	0.0053 \pm 0.0026	0.49
z_{02}	-0.0005 \pm 0.0010	2.00
z_{11}	0.0009 \pm 0.0018	2.00
z_{30}	0.00202 \pm 0.00089	0.44
z_{03}	0.00176 \pm 0.00029	0.16
z_{21}	0.00289 \pm 0.00097	0.34
z_{12}	0.00270 \pm 0.00056	0.21
z_{40}	-0.00011 \pm 0.00012	1.09
z_{04}	0.000094 \pm 0.000021	0.22
z_{31}	0.00014 \pm 0.00014	1.00
z_{22}	0.00022 \pm 0.00010	0.45

Таблицы III

4-й порядок, МНП

Параметр, 16	Цефеиды, 639	Доля
σ_z	0.1589 \pm 0.0044	0.03
z_{00}	-0.022 \pm 0.010	0.45
z_{10}	-0.0237 \pm 0.0081	0.34
z_{01}	-0.0180 \pm 0.0053	0.29
z_{20}	-0.0002 \pm 0.0032	16.00
z_{02}	-0.0001 \pm 0.0013	13.00
z_{11}	-0.0005 \pm 0.0022	4.40
z_{30}	0.00007 \pm 0.00115	16.43
z_{03}	0.00183 \pm 0.00036	0.20
z_{21}	0.0040 \pm 0.0012	0.30
z_{12}	0.00240 \pm 0.00071	0.30
z_{40}	-0.00021 \pm 0.00016	0.76
z_{04}	0.000088 \pm 0.000026	0.30
z_{31}	0.00006 \pm 0.00018	3.00
z_{22}	0.00043 \pm 0.00013	0.30

Таблицы IV

4-й порядок, МНП

Параметр, 16	Цефеиды, 615	Доля
σ_z	0.1187 \pm 0.0033	0.03
z_{00}	-0.0243 \pm 0.0079	0.33
z_{10}	-0.0320 \pm 0.0061	0.19
z_{01}	-0.0131 \pm 0.0040	0.31
z_{20}	0.0055 \pm 0.0025	0.45
z_{02}	-0.0007 \pm 0.0010	1.43
z_{11}	0.0008 \pm 0.0018	2.25
z_{30}	0.00203 \pm 0.00087	0.43
z_{03}	0.00180 \pm 0.00028	0.16
z_{21}	0.00289 \pm 0.00094	0.33
z_{12}	0.00288 \pm 0.00055	0.19
z_{40}	-0.00012 \pm 0.00012	1.00
z_{04}	0.000099 \pm 0.000020	0.20
z_{31}	0.00013 \pm 0.00014	1.08
z_{22}	0.00022 \pm 0.00010	0.45