

УДК 524.4-32

СПЕКТРЫ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ КОЛЕБАНИЙ МОДЕЛЕЙ РАССЕЯННЫХ ЗВЁЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

© 2015 В. М. Данилов*, С. И. Путков**

*Коуровская астрономическая обсерватория, Уральский федеральный университет,
Екатеринбург, 620000 Россия*

Поступила в редакцию 4 августа 2014 года; принята в печать 24 сентября 2014 года

В работе выполнен корреляционный и спектральный анализ колебаний фазовой плотности и модулей скорости звезд в шести моделях рассеянных звездных скоплений (для модели 1 скопления рассматривались разные значения параметра сглаживания ϵ силовых функций в уравнениях движения звезд). Вычислены взаимные корреляционные функции для флуктуаций фазовой плотности f моделей скоплений и модулей скоростей звезд v . Пространственное Фурье-преобразование взаимных корреляционных функций при нулевом сдвиге по времени использовалось для вычисления спектров волновых чисел колебаний значений f и v . Спектр волновых чисел колебаний f оказался более простым в сравнении со спектром волновых чисел колебаний v . Основные по мощности колебания f и v расположены в области малых значений волнового числа k (и больших длин волн $\lambda > 0.91-1.25$ пк); значительный вклад в среднюю мощность колебаний f и v вносят гомологичные колебания скоплений. Обнаружены повторяющиеся с равным шагом по k колебания v в пяти моделях скоплений. Обнаружены и исследованы зависимости спектров волновых чисел колебаний f и v от ϵ в модели 1 скопления. Такие спектры заметно меньше изменяются при изменении ϵ , чем частотные спектры колебаний f . Увеличение ϵ меньше влияет на спектры волновых чисел колебаний f , чем на спектры волновых чисел колебаний v . При увеличении ϵ в среднем возрастает наклон спектра волновых чисел, что обусловлено изменением строения модели скопления по расстоянию от его центра. Обсуждаются астрофизические приложения полученных результатов (отличие полученных спектров от спектра Колмогорова, дискретность длин волн колебаний v в пяти моделях скоплений, ширины спектров наиболее значительных по мощности колебаний моделей, оценки приливных радиусов скоплений и др.).

Ключевые слова: *звезды: кинематика и динамика — рассеянные скопления и ассоциации*

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4], а также в главе 5 книги [5], обсуждались особенности формирования спектров колебаний моделей сферических бесстолкновительных изолированных звездных систем, а также особенности распределений фазовой плотности и энергии звезд в таких моделях. В работе [1] была построена самосогласованная модель изохронной сферической системы, испытывающая радиальные колебания малых конечных амплитуд [6] (в изохронной модели орбитальный период движения звезды зависит только от энергии звезды и не зависит от углового момента движения звезды). Для описания и анализа колебаний такой модели в [1] использовалось расширенное (восьмерное) фазовое пространство, в котором такая система является стационарной [7], определены инварианты движения звезды в системе с расширенным

фазовым пространством, построены сечения Пуанкаре (см. [7]) для ряда траекторий движения звезд, выполнен Фурье-анализ этих траекторий и построены частотные спектры траекторий. Для рассмотренных в [1] амплитуд колебаний модели с помощью сечений Пуанкаре были найдены резонансные орбиты звезд с действительными частотами ω_n колебаний фазовых координат звезд, такими, что $\Omega : \omega_n = n : 1$, где Ω — частота радиальных колебаний модели системы, n — целое число. Большое количество траекторий звезд в этой модели оказались захваченными в резонансные семейства с частотами, близкими или равными ω_n . Согласно [1], самосогласованное распределение фазовой плотности по энергиям имеет локальные минимумы («ямы») на энергиях звезд с траекториями, расположенными вблизи устойчивых замкнутых резонансных орбит (согласно [1], движения звезд по таким орбитам способствуют затуханию колебаний модели), а также локальные максимумы

*E-mail: Vladimir.Danilov@urfu.ru

**E-mail: Putkov_S@mail.ru

вблизи положений нерезонансных и некоторых резонансных неустойчивых замкнутых орбит, «поддерживающих» колебания модели системы. В «пробелах» распределения фазовой плотности по энергии возмущение фазовой плотности, вызванное колебаниями системы, сравнимо по величине со значением невозмущенной равновесной фазовой плотности [1].

В работе [2] с помощью уравнений Власова и Пуассона для сферической бесстолкновительной изолированной системы записано линеаризованное уравнение для малого возмущения εf функции фазовой плотности f , содержащее в правой части сумму $M + N$ операторов M и N (см. формулы (1.3a) и (1.3b) в [2]), действующих на функцию f . Оператор M используется в [2] для описания изменений функции f в результате движения звезд вдоль их фазовых траекторий в равновесной невозмущенной системе. Действие этого оператора в уравнении для возмущений функции f обеспечивает затухание колебаний в системе и ее стремление к равновесию в результате фазового размешивания. Оператор N учитывает самосогласованность системы и действие на нее силового поля, произведенного малым возмущением фазовой плотности. Спектр собственных значений ω оператора M непрерывный, но в нем могут существовать пробелы, вызванные совместным действием операторов M и N ; здесь ω — собственные частоты колебаний f в системе. Согласно [2], в этих пробелах могут существовать одна или более мод устойчивых колебаний с действительными частотами, что препятствует затуханию колебаний в системе и ее стремлению к равновесию.

Согласно [3], даже слабо затухающие колебания плотности (и фазовой плотности) существуют и могут длительное время сохраняться в моделях сферических бесстолкновительных изолированных звездных систем. Чтобы это показать, в [3] был развит и применен к моделям Кинга [8] метод анализа дисперсионного соотношения (см. раздел 2, приложение В, а также ссылки в [3]). В работе [3] для четырех моделей звездных скоплений [8] с различными значениями параметра концентрации и потенциала в центре для случая наиболее слабо затухающих мод были получены оценки времени затухания, превышающие 20 средних времен пересечения звездой расстояния, равного радиусу сферы (с центром в центре масс скопления), содержащей половину массы скопления.

В [4] проведено общее исследование стационарных колебаний бесстолкновительных систем с постоянными частотой и амплитудой и с непрерывным спектром действительных частот (единственным значительным ограничением является используемое в [4] предположение об интегрируемости

уравнений движения звезд в поле сил невозмущенного потенциала системы со стационарными колебаниями, но полученные в [4] результаты могут быть использованы для описания колебаний сферических изолированных систем). Такие стационарные волны колебаний являются гравитационным аналогом волн Ван Кампена в плазме (модулированный, например, по плотности поток частиц, движущийся со скоростью, равной фазовой скорости волны, и сопровождающее его поляризованное облако, возникающее в результате воздействия пучка на электроны плазмы; см. обзор [9], а в случае гравитирующих систем см. [5], с. 413–415). Согласно [4], изолированные частоты в спектре колебаний рассмотренных систем могут быть и комплексными.

В книге [5] (см. главу 5, с. 438) проведено обсуждение колебаний сферических бесстолкновительных изолированных систем с непрерывным резонансным спектром частот затухающих колебаний, содержащим пробелы в окрестностях действительных частот незатухающих колебаний. Резонансный спектр в [5] определяется звездами, радиальные скорости движения которых совпадают с фазовой скоростью движения волны потенциала и удовлетворяющими резонансному соотношению (5.149) между действительными частотами ω радиальных колебаний потенциала и $n\Omega_r$, где n — целое число и Ω_r частота колебаний радиуса орбиты звезды.

Отметим, что в работах [1–5] спектром частот колебаний системы обычно называют набор частот колебаний, удовлетворяющих определенным условиям и соотношениям (мощности этих колебаний как правило не вычисляются). Кроме того, рассмотренные в [1–5] модели звездных систем слишком просты в сравнении с наблюдаемыми рассеянными звездными скоплениями (РЗС), в которых плотности вещества достаточно малы, а влияние внешнего силового поля Галактики весьма значительно, что приводит к развитию многочисленных неустойчивых колебаний и к поддержанию нестационарности в таких скоплениях на промежуточных временах, сравнимых с их средним временем жизни [10]. Вместе с тем, некоторые особенности спектров колебаний РЗС вполне могут быть объяснены в рамках механизмов, рассмотренных в работах [1–5].

Изучение спектров частот колебаний численных динамических моделей РЗС [11] проводилось в недавних работах [12–15]. В [12, 13] рассматривались колебания фазовой плотности f в шести моделях РЗС на разных расстояниях r от центра скопления. Спектры колебаний значений f в работах [12–15] были получены с использованием соответствующих этим колебаниям взаимных корреляционных функций и их Фурье-преобразования. В

работе [12] было подтверждено наличие в моделях РЗС известных неустойчивых колебаний значений f , связанных с гомологичными колебаниями ядер скоплений [16, 17], и обнаружен ряд новых неустойчивых колебаний (до 32–41 пары колебаний f с разными комплексно-сопряженными частотами в каждой модели скопления), получены оценки времени нарастания амплитуд таких колебаний в ϵ раз $(0.4–10)\tau_{v.r.}$, где $\tau_{v.r.}$ — время бурной релаксации модели скопления. В [12] приведены графики взаимной корреляционной функции и спектра частот колебаний в модели 1 РЗС, имеющей наименьшую плотность среди рассмотренных в [11] шести моделей; в работе [13] приведены частотные спектры шести моделей РЗС. В работе [14] исследовались 5-я и 6-я модели, имеющие наиболее протяженные массивные ядра из числа моделей, рассмотренных в [11] (начальные параметры моделей РЗС приведены в таблице 1 работы [11]; каждая модель скопления состоит из 500 звезд с массами, равными солнечной; скопление движется по круговой орбите радиуса $R_G = 8200$ пк в плоскости Галактики вокруг ее центра в поле сил потенциала [18]; в начальный момент каждая модель РЗС состоит из двух однородных по плотности сферических подсистем (ядро и гало) с совпадающими центрами масс; модели РЗС в [11] пронумерованы в порядке уменьшения степени нестационарности скопления). В [14] исследовались волны колебаний f , распространяющиеся от центральных областей скопления вдоль его экваториальной плоскости, совпадающей с галактической плоскостью. Согласно [14], частоты колебаний f в этих моделях находятся в рациональных отношениях друг с другом (точки соседних локальных максимумов на спектрах колебаний находятся на одинаковых по частоте расстояниях друг от друга). Возможно, такое расположение локальных максимумов на спектрах колебаний f обусловлено действием резонансов в этих моделях. В работе [15] исследовались колебания фазовой плотности и потенциала U в модели 1 скопления при разных значениях параметра сглаживания ϵ силовых функций в уравнениях движения звезд. Согласно [15], основные по мощности колебания U связаны с колебаниями f и расположены в спектре на низких частотах $\nu < 3/\tau_{v.r.}$. В работе [15] обнаружен ряд неустойчивых колебаний значений U в ядре модели 1 скопления (до 30 пар колебаний с разными комплексно-сопряженными частотами); отмечено прохождение радиальных волн колебаний f с частотой внешнего воздействия (прилива) от периферии к центру скопления, а также распад таких волн на несколько составляющих с соизмеримыми частотами в ядре скопления; обсуждаются возможности отражения и излучения волн колебаний f от границы ядра скопления.

Выполненный в [15] анализ изменений спектров колебаний f и U при изменении сглаживающего параметра ϵ приводит к выводу о «повторяемости» спектров при некоторых фиксированных значениях ϵ , что, согласно [15], может быть обусловлено существованием определенных соотношений между размерами скопления и длинами волн в скоплении и, возможно, связано с дискретностью длин волн и фаз колебаний в волнах.

Согласно [19, 20], пространственное Фурье-преобразование взаимных корреляционных функций флуктуаций ряда характеристик плазмы при нулевом сдвиге по времени может быть использовано для построения спектров волновых чисел колебаний в плазме. Представляет интерес использование такого метода для построения спектров волновых чисел колебаний в моделях РЗС [11], а также детальное исследование длин волн и мощности колебаний, формирующихся в таких моделях.

В работе [21] была отмечена слабая турбулентность в движениях звезд ядра модели 1 РЗС. Для обсуждения динамического состояния моделей скоплений и параметров турбулентности в этой модели необходимо исследовать колебания модулей скорости звезд v и величин f (т.к. величина f в каждый момент времени зависит не только от координат, но и от скоростей звезд). Отметим, что вывод работы [21] о турбулентности в модели 1 РЗС был получен при изучении динамики парных корреляций в пространстве величин f , но проиллюстрирован с помощью распределений модулей скоростей звезд ядра скопления, а также модулей скоростей звезд, участвующих в формировании таких корреляций. При этом фазовая плотность f вычислялась по группам звезд с небольшим числом звезд $n_{st} = 6$, ближайших к любой, произвольно заданной точке в скоплении. Такие значения n_{st} в большей степени соответствуют локальному и случайному характеру колебаний v и f . Колебания таких групп могут быть использованы при анализе эффекта звездных сближений (в случае малых относительных скоростей движения звезд, входящих в группу) или при описании турбулентности (в случае больших относительных скоростей звезд в группе). В работах [12–15] при вычислении взаимных корреляционных функций использовалось значение $n_{st} = 30$. В этом случае дисперсионные кривые зависимостей волнового числа от частоты освобождаются от случайного шума, колебания таких групп становятся в большей степени крупномасштабными, заметным образом повторяют колебания всего скопления в целом и могут быть использованы при анализе степени нестационарности системы. Поскольку случаи $n_{st} = 6$ и $n_{st} = 30$ могут описывать разные динамические процессы, при

построении спектров волновых чисел для величины n_{st} представляет интерес использовать оба эти значения.

Согласно [15], изменение величины ϵ приводит к изменению некоторых структурно-динамических характеристик модели скопления и к изменениям частотных спектров. Поэтому изменения ϵ могут влиять и на формирование спектров волновых чисел. В этой связи, представляет интерес построение спектров волновых чисел колебаний моделей РЗС при разных значениях сглаживающего параметра ϵ .

Целями данной работы являются: (1) вычисление пространственных взаимных корреляционных функций (при нулевом сдвиге по времени) и спектров волновых чисел колебаний фазовой плотности f и модуля скорости звезд v в моделях РЗС [11]; (2) вычисление таких корреляционных функций и спектров для колебаний величин f и v в модели 1 скопления при разных значениях ϵ ; (3) использование полученных спектров для анализа динамики РЗС и их моделей.

2. ВЗАИМНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИЙ

Пусть $\mathbf{X}(t, \mathbf{r}) = (X_1, X_2) = \mathbf{y}(t, \mathbf{r}) - \overline{\mathbf{y}(t, \mathbf{r})}$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (v, f)$, $v = |\mathbf{v}|$, \mathbf{v} — вектор скорости звезды, величины v и f получены по n_{st} звездам из окрестностей точки с координатой \mathbf{r} в модели скопления, а черта сверху означает усреднение по времени $t \in [0, t_m]$ (начало системы координат \mathbf{r} совпадает с центром масс скопления, t_m — наибольшее значение t , используемое для расчета корреляций). Для краткости здесь аргумент \mathbf{v} у функций f и X_2 не записан. Величина \mathbf{X} обычно называется отклонением или флуктуацией величины \mathbf{y} (см. [15, 19, 20]) и предполагается случайной переменной, образующей стационарный случайный процесс. Следуя работам [15, 19, 20], обозначим функцию взаимной корреляции флуктуаций величины \mathbf{y} как $\mathbf{C}(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$, где координаты вектора \mathbf{C} имеют вид:

$$C_j(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}) = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} X_j(t, \mathbf{r}) X_j(t + \tau, \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) dt, \quad (1)$$

$$j = 1, 2.$$

Здесь τ — временная задержка. Пусть $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ — координаты точек 1 и 2, в которых рассматриваются флуктуации X_j . В общем случае функции $C_j(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$ могут быть записаны в виде пределов по t_m при $t_m \rightarrow \infty$ от выражений в правых частях соотношений типа (1).

Пусть $\tau = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $|\Delta\mathbf{r}| = r$. В этом случае расстояния двух точек 1 и 2 от центра скопления

равны 0 и r соответственно. Усредняя C_j из (1) по двум угловым координатам вектора $\Delta\mathbf{r}$, находим функции $K_j(r) = \overline{C_j(0, \mathbf{0}, \Delta\mathbf{r})}$ пространственной взаимной корреляции [19, 20], которые являются симметричными относительно перестановок точек 1 и 2 между собой (здесь верхняя черта означает усреднение C_j по угловым координатам вектора $\Delta\mathbf{r}$). Свойства функций взаимной корреляции описаны в [20], с. 23, а также в книге [22], с. 59 и с. 61, формула (3.28).

В данной работе был рассмотрен ряд положений точки 2 на сфере радиуса r с центром в центре масс скопления. Для этого в сферической системе координат (r, θ, ϕ) с шагом $\Delta\theta = \Delta\phi = \pi/(4s)$ были заданы координаты этих точек при $s = 1, 2, 4$, выполнен переход к правой декартовой прямоугольной системе координат (ξ, η, ζ) с началом в центре масс скопления (ось ζ направлена перпендикулярно плоскости Галактики, ось ξ — от центра Галактики в плоскости Галактики, а ось η — в направлении движения скопления в плоскости Галактики). Вместе с точкой 1 общее число точек n_p , в окрестностях которых рассматриваются флуктуации \mathbf{X} , равно $n_p = 27, 115, 483$ при $s = 1, 2, 4$ соответственно.

Графики функций $K_j(r)$ для модели 1 при $n_p = 483$ в случае $t_m = 3\tau_{v,r}$ приведены на рис. 1. Величины r , $K_1(r)$ и $K_2(r)$ на рис. 1 приведены в пк, $(\text{пк}/\text{млн лет})^2$ и $\text{млн лет}^3/\text{пк}^6$ соответственно. Усреднение величин C_j выполнено по 482 значениям C_j , соответствующим разным положениям точки 2 на сферах радиуса r при $r \leq R_t$, где R_t — приливный радиус скопления [23]. Вертикальными барами на рис. 1 показаны погрешности соответствующих средних значений C_j . При построении рис. 1 использовались фазовые координаты звезд (ФКЗ) 11-го порядка точности, см. [11]. Согласно рис. 1, зависимости от r величин $K_1(r)$ имеют более сложный вид в сравнении с $K_2(r)$, что приводит и к более сложным спектрам волновых чисел колебаний v в сравнении со спектрами волновых чисел колебаний f , см. ниже. На рис. 1b заметно выделяются корреляции колебаний при значениях r , близких к 4 пк; на рис. 1a также заметен рост корреляций с увеличением r , что указывает на увеличение роли колебаний с такими длинами волн в динамической эволюции модели 1 скопления. Для моделей 2–6 РЗС зависимости $K_j = K_j(r)$ мы не приводим, т.к. они имеют качественно такой же характер, как и на рис. 1.

3. СПЕКТРЫ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

Для вычисления спектров волновых чисел флуктуаций величин \mathbf{y} в моделях РЗС мы использовали программу быстрого преобразования

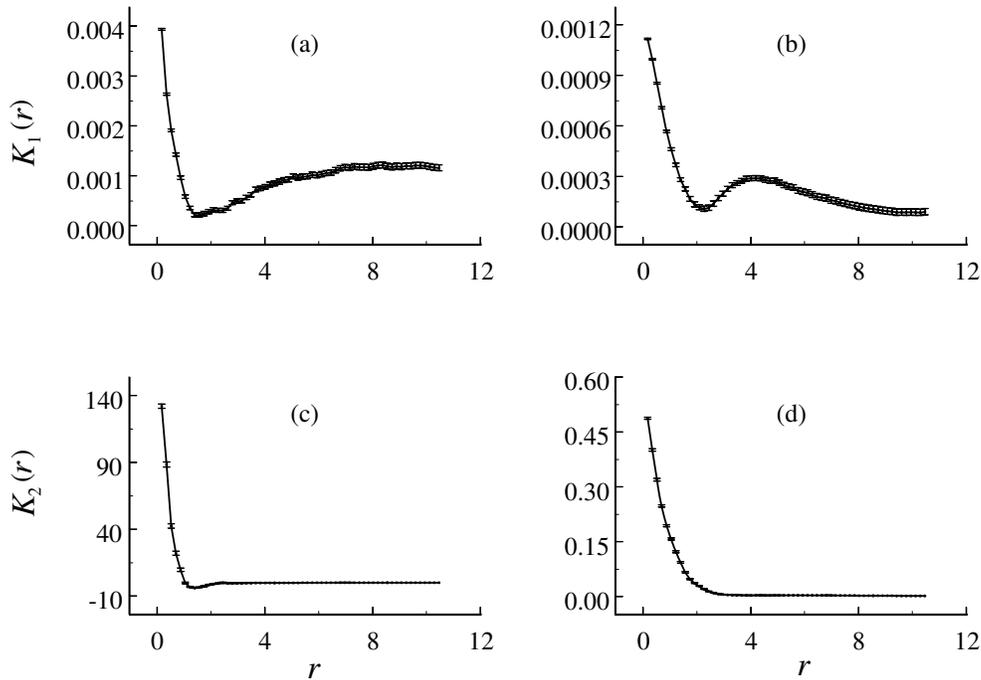


Рис. 1. Графики функций взаимной корреляции колебаний величин v (a,b) и f (c,d) в модели 1 РЗС при $n_{st} = 6$ (a,c) и $n_{st} = 30$ (b,d).

Фурье (БПФ) из книги Грея [24], стр. 483. В качестве волнового числа мы рассматриваем величину $k = 1/\lambda$, где λ — длина волны колебаний величин v и f . Отдельно вычислялись Фурье-преобразования $\mathcal{F}_j(k)$ и $\sigma_{\mathcal{F}_j}(k)$ для величин $K_j(r)$ и их погрешностей $\sigma_{K_j}(r)$.

На рис. 2а и 2б приведены графики спектров волновых чисел $S_v(k) = |\mathcal{F}_1(k)|$ колебаний значений v , полученные для модели 1 при $n_p = 483$ по данным о значениях функции $K_1(r)$ и ее погрешностях $\sigma_{K_1}(r)$ при $n_{st} = 6$ и $n_{st} = 30$. Величины k и $S_v(k)$ на рис. 2 приведены в пк^{-1} и $\text{пк}^3/\text{млн лет}^2$ соответственно. Графики спектров волновых чисел $S_f(k) = |\mathcal{F}_2(k)|$ колебаний значений f , полученные для модели 1 при $n_p = 483$ по данным о значениях функции $K_2(r)$ и ее погрешностях $\sigma_{K_2}(r)$ при $n_{st} = 6$ и $n_{st} = 30$, приведены на рис. 2с и 2д. Величины $S_f(k)$ приведены в $\text{млн лет}^3/\text{пк}^5$.

На всех спектрах рис. 2 наблюдаются локальные максимумы при $k \leq 0.0056 \text{ пк}^{-1}$, что соответствует длинам волн $\lambda \geq 178.7 \text{ пк}$ и колебаниям в скоплении, близким к гомологическим (в этом случае колебания величин v и f на разных расстояниях $r \leq R_t \simeq 10.468 \text{ пк}$ от центра происходят в одинаковой фазе). Мощность таких колебаний велика, их вклад в среднюю мощность колебаний значителен. Можно отметить локальные максимумы $S_f(k)$ на рис. 2с вблизи значений $k \simeq 0.134, 0.190 \text{ пк}^{-1}$, что соответствует длинам волн $\lambda \simeq 7.44, 9.17 \text{ пк} < R_t$.

На спектрах колебаний v хорошо заметны многочисленные локальные максимумы, повторяющиеся с равным шагом по k до значений $k > 1 \text{ пк}^{-1}$ ($\lambda < 1 \text{ пк}$), см. рис. 2а и 2б. Обозначим Δk — расстояние между точками двух соседних по k локальных максимумов. В этом случае длины волн для таких максимумов связаны между собой соотношениями: $\Delta k = 1/\lambda_{i+1} - 1/\lambda_i = \text{const}$. Эти соотношения легко могут быть обобщены на случай локальных максимумов, отстоящих друг от друга по k на величину $j\Delta k$: $\lambda_{i+j} = \lambda_i/(1 + j\Delta k\lambda_i)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Отметим, что наиболее часто в спектрах всех рассмотренных нами моделей РЗС, кроме четвертой (наиболее плотной при $t = 0$), наблюдаются одинаковые значения Δk , такие, что $R_t\Delta k \simeq 1$ (см. таблицу 1). Значительно реже в моделях РЗС наблюдаются значения $R_t\Delta k \simeq 3/5, 2$ (в основном, в области малых $k \simeq 0.062, 0.056$; для краткости здесь и далее размерности пк^{-1} у величин k мы не приводим). Пусть $R_t\Delta k = 1, c < 1, c = \text{const}$, $\lambda_i = cR_t$. Тогда $\lambda_{i+j} = cR_t/(1 + jc)$, и длины волн достаточно большого числа колебаний в моделях РЗС связаны с размерами скопления, что согласуется с выводом работы [15] о дискретности длин волн колебаний в моделях РЗС и о связи этих длин волн с размерами скопления.

Отметим, что полученный для модели 1 РЗС спектр колебаний величин v сильно отличается от спектра Колмогорова ($S_v(k) = Ak^{-5/3}$, $A = \text{const}$)

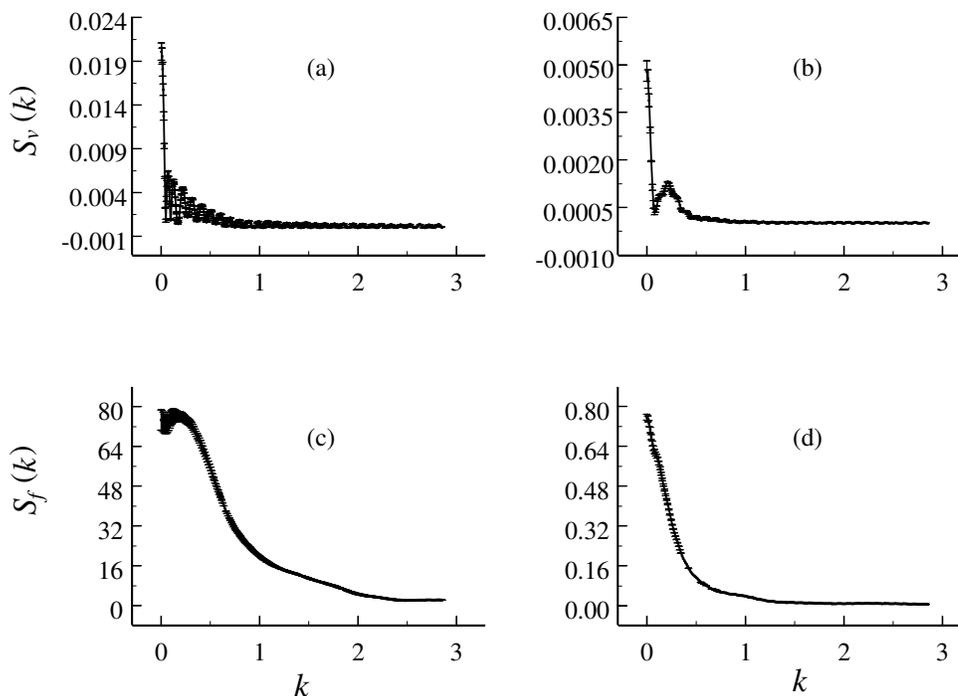


Рис. 2. Спектры волновых чисел колебаний величин v (a,b) и f (c,d) для модели 1 РЗС при $n_{st} = 6$ (a,c) и $n_{st} = 30$ (b,d).

наличием большого числа локальных максимумов. Варьируя величину A , можно аппроксимировать функцией $Ak^{-5/3}$ верхнюю огибающую некоторых участков наблюдаемого в модели 1 спектра (рис. 2a) при $k > 0.1$. На рис. 2a и 2b мы видим спектры значительно более молодой в динамическом отношении системы, чем в случае $S_v(k) = Ak^{-5/3}$. Последний соответствует локально изотропной, однородной и стационарной турбулентности с установившимся потоком энергии от малых k к большим (см. [25], с. 9, 16; [26], раздел I, подраздел 7.1, с. 215). В случае рис. 2a влияние неустойчивостей колебаний v на спектр велико, поток энергии по спектру нестационарный, и взаимодействие вихрей еще не успело привести спектр к монотонно убывающему виду. Причиной формирования многочисленных локальных максимумов на спектрах рис. 2a и 2b вполне могут быть резонансы между частотами колебаний с соответствующими таким максимумам длинами волн в модели 1 скопления.

Форма спектров колебаний величин f мало меняется при переходе от одной модели к другой. Поэтому графики таких спектров для моделей 2–6 здесь мы не приводим.

На рис. 3 и 4 приведены графики спектров $S_v(k)$ колебаний значений v , полученные для моделей 2–6 при $n_p = 483$ и $k < 1$ по данным о значениях функции $K_1(r)$ и ее погрешностях $\sigma_{K_1}(r)$ при $n_{st} = 6$ и $n_{st} = 30$. Спектры $S_v(k)$ этих моделей при $k \geq 1$ мало отличаются друг от друга и от

спектра модели 1 (см. рис. 2a) и поэтому здесь не приводятся.

Согласно рис. 3, наиболее мощными в моделях 2, 3 являются гомологичные колебания модели 2 (с большей степенью нестационарности, чем у модели 3 [11]). В спектрах моделей 2, 3 (как и в спектре модели 1) наблюдаются серии колебаний значений v с равноотстоящими по k локальными максимумами. При $n_{st} = 30$ мощность колебаний v в модели 2 в области значений $k < 0.25$ больше, чем в модели 3 (см. рис. 3b).

При $n_{st} = 6$ мощность колебаний v в модели 3 вблизи значений $k \simeq 0.118$ даже больше, чем в модели 2 (см. рис. 3b). Однако, вклад гомологичных и близких к ним колебаний скопления в среднюю мощность колебаний v (и в нестационарность) модели 2 больше, чем в модели 3 при $k \simeq 0, 0.118$.

Согласно рис. 4, лишь спектр колебаний наиболее плотной модели 4 не содержит заметных по мощности колебаний значений v с равноотстоящими по k локальными максимумами, что указывает на подавление механизмов развития неустойчивых колебаний v в скоплениях с такой плотностью (начальный радиус $R(0)$ этой модели равен $0.7R_t$ [11]). При $n_{st} = 30$ наибольшую мощность имеют гомологичные и близкие к ним колебания в моделях 6 и 4. При $n_{st} = 6$ наибольшую мощность имеют такие колебания в моделях 5 и 4.

При обсуждении общих характеристик спектров $S_v(k)$ и $S_f(k)$ колебаний величин v и f далее для

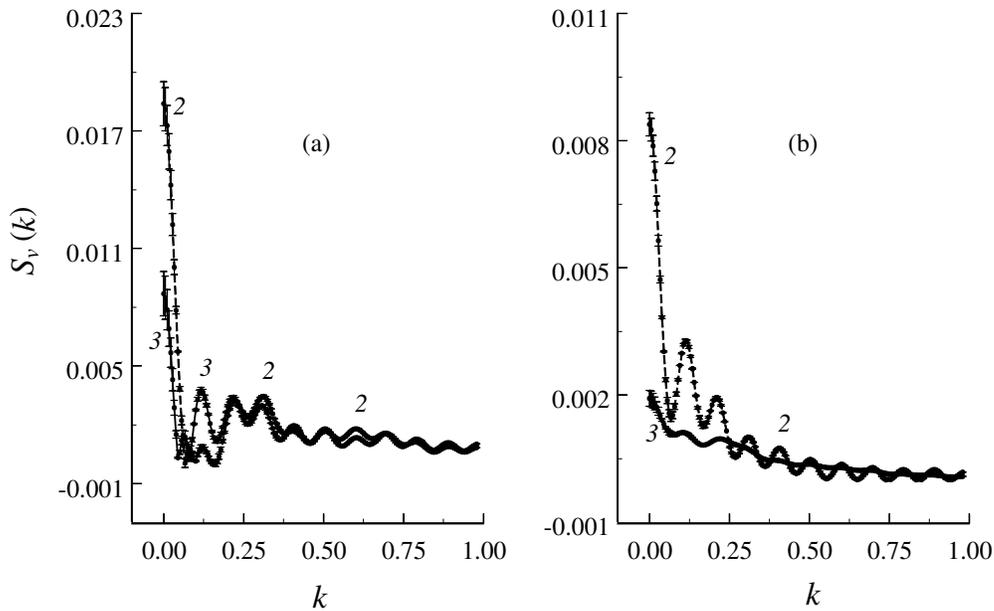


Рис. 3. Спектры волновых чисел колебаний величин v для моделей 2 и 3 РЗС при $n_{st} = 6$ (a) и $n_{st} = 30$ (b). Цифрами 2 и 3 на графиках помечены спектры моделей 2 и 3 соответственно.

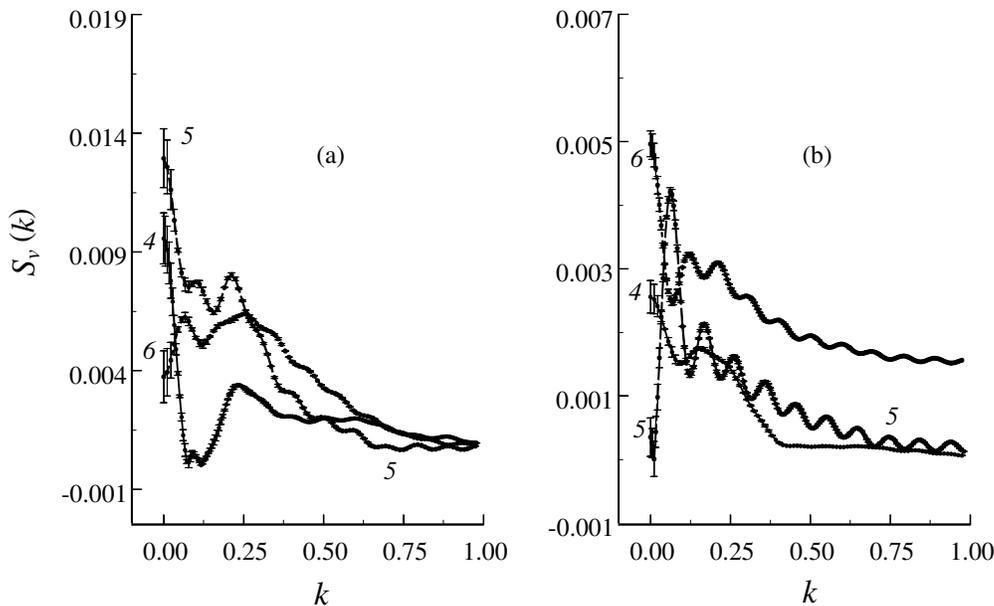


Рис. 4. Спектры волновых чисел колебаний величин v для моделей 4, 5, 6 РЗС при $n_{st} = 6$ (a) и $n_{st} = 30$ (b). Цифрами 4, 5, 6 на графиках помечены спектры моделей 4, 5, 6 соответственно. Спектр модели 6 на правой панели сдвинут вверх вдоль оси ординат на величину 0.0015.

краткости спектры обозначаются как $S(k)$. В качестве характеристики ширины участков спектров с наиболее мощными колебаниями значений f и v в данной работе используется величина $k = k_e$, которая определяется из условий $S(k_e) = e^{-1}S(k_m)$ и $k_e > k_m$, где e — основание натурального логарифма, $S(k_m)$ — наибольшее из значений спектра $S(k)$ в точках локальных максимумов при $k > 0.1$. В

этом случае при оценке ширины спектра не учитывается часто самый высокий локальный максимум в спектре при значениях k , близких к нулю. Этот максимум в большей степени характеризует начальные условия и гомологичность колебаний на стадии первого сжатия модели скопления. Бóльший интерес представляют негомологичные колебания скоплений при $k > 0.1$ и параметры

Таблица 1. Параметры волн колебаний модулей скоростей звезд v в моделях РЗС; \mathcal{N} — номер модели скопления

\mathcal{N}	$k_{\text{in}}, \text{пк}^{-1}$		$k_{\text{m}}, \text{пк}^{-1}$		$k_e, \text{пк}^{-1}$		$R_t \Delta k$	
	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$
1	0.123 ± 0.003	0.123 ± 0.003	0.123 ± 0.003	0.213 ± 0.003	0.51 ± 0.02	0.38 ± 0.04	1.01 ± 0.02	1.00 ± 0.02
2	0.224 ± 0.003	0.112 ± 0.003	0.313 ± 0.003	0.112 ± 0.003	0.759 ± 0.008	0.288 ± 0.003	0.98 ± 0.03	1.03 ± 0.01
3	0.118 ± 0.003	0.106 ± 0.003	0.118 ± 0.03	0.106 ± 0.003	0.60 ± 0.02	0.45 ± 0.01	1.006 ± 0.024	1.03 ± 0.04
4	—	—	0.235 ± 0.003	0.343 ± 0.003	0.83 ± 0.03	0.343 ± 0.003	—	—
5	0.498 ± 0.003	0.168 ± 0.003	0.213 ± 0.003	0.168 ± 0.003	0.414 ± 0.005	0.496 ± 0.007	1.02 ± 0.03	1.02 ± 0.02
6	0.252 ± 0.005	0.123 ± 0.003	0.252 ± 0.003	0.123 ± 0.003	0.615 ± 0.003	0.421 ± 0.005	1.00 ± 0.07	1.00 ± 0.02

Таблица 2. Параметры волн колебаний фазовой плотности f в моделях РЗС; \mathcal{N} — номер модели скопления

\mathcal{N}	$k_{\text{m}}, \text{пк}^{-1}$		$k_e, \text{пк}^{-1}$	
	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$	$n_{\text{st}} = 6$	$n_{\text{st}} = 30$
1	0.134 ± 0.003	0.000 ± 0.003	0.80 ± 0.02	0.292 ± 0.005
2	0.134 ± 0.003	0.101 ± 0.003	1.01 ± 0.03	0.310 ± 0.003
3	0.235 ± 0.003	0.000 ± 0.003	0.922 ± 0.005	0.371 ± 0.006
4	0.302 ± 0.003	0.000 ± 0.003	1.129 ± 0.008	0.45 ± 0.01
5	0.146 ± 0.003	0.000 ± 0.003	0.73 ± 0.01	0.290 ± 0.003
6	0.090 ± 0.003	0.000 ± 0.003	0.67 ± 0.01	0.199 ± 0.003

результатирующего «финального» спектра, формирующегося при использовании начальных условий из работы [11]. Однако в тех случаях, когда при $k > 0.1$ локальный максимум, близкий по высоте к наиболее высокому, в спектре отсутствует (например, в случае $S_f(k)$ при $n_{\text{st}} = 30$ в моделях 1, 3–6), в качестве k_{m} используется точка самого высокого локального максимума при $k < 0.1$. Если в окрестностях точки $k = k_e$ наблюдаются два локальных максимума спектра в точках $k_1 < k_e$ и $k_2 > k_e$, то для оценки величины $k = k_e$ используется близкая к верхней огибающей спектра прямая, соединяющая «вершины» (точки с координатами $(k_l, S(k_l))$, $l = 1, 2$) этих локальных максимумов, и пересечение этой прямой с линией $S(k) = S(k_e) = \text{const}$. Величины k_e и k_{m} для каждой модели РЗС приведены в таблицах 1 и 2. Для спектров $S_v(k)$ в таблице 1 приведены значения $k = k_{\text{in}}$, соответствующие точке первого локального максимума в серии таких максимумов, расположенных в области $k \geq k_{\text{in}}$, с постоянным расстоянием Δk между точками соседних локальных максимумов.

Согласно таблице 1, в моделях 1–4 и 6 величины k_e убывают при переходе от $n_{\text{st}} = 6$ к $n_{\text{st}} = 30$.

Следовательно, спектр волновых чисел колебаний величин v с $S_v(k) \geq S_v(k_e)$ при таком переходе становится более узким. В модели 5 при таком переходе спектр величин k становится шире. Величины k_{in} при таком переходе не возрастают (в моделях 2–6 величины k_{in} убывают). Следовательно, появление первых локальных максимумов с $\Delta k = \text{const}$ при таком переходе, в основном, приближается к $k = 0$ (к большим значениям λ). Согласно таблице 2, для спектров колебаний величин f моделей 1–6 РЗС при переходе от $n_{\text{st}} = 6$ к $n_{\text{st}} = 30$ величины k_e и k_{m} убывают. В этом случае спектр колебаний величин f с $S_f(k) \geq S_f(k_e)$ становится более узким по k .

Таким образом, большие значения n_{st} чаще всего позволяют исследовать колебания большего масштаба с большими длинами волн в моделях РЗС [11].

В случае $n_{\text{st}} = 6$ в моделях 1, 2, 4 с увеличением плотности модели скопления величина k_e растет для колебаний величин v и f . Спектры таких колебаний становятся шире по k . В моделях 2, 3, 5, 6 с увеличением массы и размеров ядра

Таблица 3. Погрешности χ спектров $S(k)$ в моделях РЗС; \mathcal{N} — номер модели скопления

\mathcal{N}	χ_v		χ_f	
	$n_{st} = 6$	$n_{st} = 30$	$n_{st} = 6$	$n_{st} = 30$
1	0.036 ± 0.004	0.149 ± 0.010	0.0030 ± 0.0001	0.0161 ± 0.0006
2	0.060 ± 0.005	0.042 ± 0.004	0.00140 ± 0.00003	0.0104 ± 0.0005
3	0.00060 ± 0.00004	0.000183 ± 0.000009	0.000046 ± 0.000002	0.000023 ± 0.000001
4	0.031 ± 0.002	0.0100 ± 0.0004	0.0067 ± 0.0003	0.0035 ± 0.0002
5	0.000157 ± 0.000007	0.00018 ± 0.00001	0.0000025 ± 0.0000003	0.000067 ± 0.000003
6	0.000 ± 0.000	0.000007 ± 0.000001	0.000 ± 0.000	0.0000006 ± 0.0000001

модели скопления величины k_e убывают для колебаний величин f (в случае колебаний значений v величины k_e убывают в последовательности моделей 2, 3, 5, а затем заметно возрастают в модели 6 с наибольшим числом звезд в ядре скопления). В случае $n_{st} = 30$ в моделях 1, 2, 4 с увеличением плотности модели скопления величина k_e растет для колебаний величин f и убывает для колебаний величин v при переходе от модели 1 к модели 2, а затем возрастает при переходе от модели 2 к модели 4. В моделях 2, 3, 5, 6 с увеличением массы и размеров ядра модели скопления величины k_e возрастают для колебаний величин f при переходе от модели 2 к модели 3, а затем убывают в последовательности моделей 3, 5, 6 (в случае колебаний значений v величины k_e возрастают в последовательности моделей 2, 3, 5, а затем убывают при переходе к модели 6 с наибольшим числом звезд в ядре скопления).

Таким образом, при $n_{st} = 6$ наблюдаются следующие наиболее простые зависимости величин k_e от параметров моделей РЗС: (1) k_e возрастает с увеличением плотности модели скопления для колебаний величин v и f ; (2) k_e убывает с увеличением размеров и массы ядра модели для колебаний величин f ; (3) при $n_{st} = 30$ величина k_e возрастает с увеличением плотности модели скопления для колебаний величин f . Отметим, что малые значения k_e в моделях РЗС с малой плотностью соответствуют большому числу волн $\lambda_e = 1/k_e$ и большому масштабу колебаний. Такие колебания во времени обычно происходят с меньшими частотами, что согласуется с уменьшением частоты радиальных колебаний при уменьшении плотности скопления (см., например, формулу (9) из [27]). Меньшие значения k_e в моделях РЗС с более массивными и протяженными ядрами соответствуют большому числу волн λ_e , что вполне согласуется с увеличением масштабов колебаний, т.к. нестационарность

РЗС в основном обеспечивается колебаниями ядер скоплений [21].

В таблице 3 для шести моделей РЗС [11] приведены средние по $k \lesssim 2.86$ значения величин $\chi = |S^{(10)}(k) - S^{(11)}(k)| / (S^{(10)}(k) + S^{(11)}(k))$, где $S^{(10)}(k)$ и $S^{(11)}(k)$ — спектры волновых чисел колебаний в моделях РЗС, полученные по данным о ФКЗ 10-го и 11-го порядков точности при $n_{st} = 6, 30$ ($\chi = \chi_v$ и $\chi = \chi_f$ в случае колебаний величин v и f соответственно). Величины χ характеризуют среднюю по k относительную погрешность вычислений спектров $S(k)$ в рассмотренных моделях РЗС. Согласно таблице 3, увеличение значений n_{st} от 6 до 30 часто приводит к увеличению χ ; наибольшие значения χ достигаются в случае $\chi = \chi_v$ для модели 1 ($\chi_v = 0.149 \pm 0.010$), что вызвано в основном погрешностями вычислений $S_v(k)$ при $k > 1$ (в случае $k \leq 1$ при $n_{st} = 30$ для модели 1 находим: $\chi_v = 0.051 \pm 0.006$). Согласно таблице 3, $\chi_v > \chi_f$.

Таким образом, точность ФКЗ из [11], используемых при вычислении спектров $S(k)$ в данной работе, вполне достаточна для выводов о параметрах и свойствах спектров $S(k)$.

4. ЗАВИСИМОСТИ СПЕКТРОВ $S(k)$ МОДЕЛИ 1 РЗС ОТ ϵ

Следуя работе [15], оценку «наклона» спектров $S(k)$ волновых чисел колебаний величин v и f в модели 1 скопления мы проводили с помощью разностного отношения $q = ({}^b S(k) - {}^a S(k)) / (k_b - k_a)$, где $k_a = 1.55$, $k_b = 1.95$, ${}^a S(k)$ и ${}^b S(k)$ — средние значения $S(k)$ в следующих интервалах \mathcal{N}_a и \mathcal{N}_b значений k соответственно: $k \in [0.1, 1.0] \equiv \mathcal{N}_a$ и $k \in [1.5, 2.4] \equiv \mathcal{N}_b$. Волновые числа k из интервала \mathcal{N}_a соответствуют длинам волн λ от 1 пк до 10 пк (такой интервал длин волн колебаний v и f сравним с интервалом расстояний от среднего расстояния

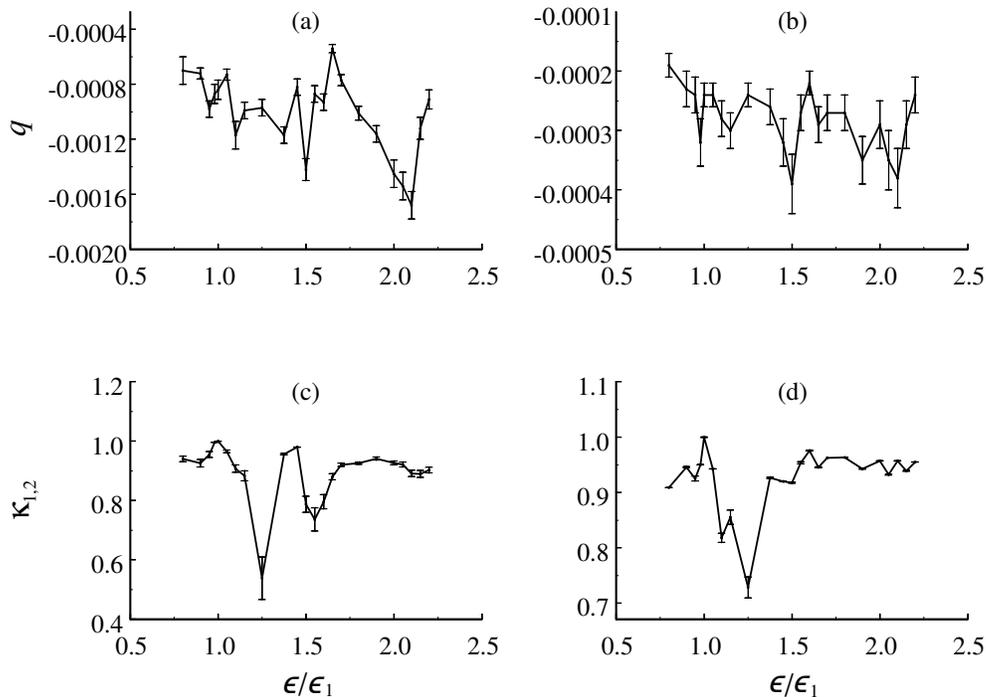


Рис. 5. Зависимости величин q и $\kappa_{1,2}$ от ϵ для колебаний величины v в модели 1 РЗС при $n_{st} = 6$ (a,c) и $n_{st} = 30$ (b,d).

между звездами вблизи центра модели скопления [15] до расстояния, близкого к приливному радиусу R_t скопления). Такие колебания в среднем имеют большую мощность, чем колебания с $k \in \mathcal{N}_b$, соответствующие длинам волн λ от 0.42 пк до 0.67 пк.

На рис. 5а и 5б и рис. 6а и 6б приведены графики зависимостей $q = q(\epsilon)$ для спектров $S_v(k)$ и $S_f(k)$ при $n_{st} = 6$ и 30. Как и в работе [15], величина ϵ_1 принята равной $\epsilon_1 = 0.012\bar{r}_{ij}$ (\bar{r}_{ij} — среднее всем по разным парам звезд в скоплении начальное расстояние между звездами в модели 1 скопления). Согласно рис. 5а и 5б, величины $q(\epsilon)$ в среднем слабо убывают с увеличением ϵ . Следовательно, наклоны спектров $S_v(k)$ в среднем возрастают с увеличением ϵ . При $n_{st} = 30$ увеличение наклона достаточно мало (сравнимо с наибольшими из приведенных на рис. 5б погрешностей величин q). При $n_{st} = 6$ увеличение наклона $S_v(k)$ при увеличении ϵ более заметно. Можно отметить значения $\epsilon/\epsilon_1 = 1.1, 1.5, 2.1$, при которых зависимости $q = q(\epsilon)$ имеют локальные минимумы (при таких значениях ϵ наклоны спектров $S_v(k)$ заметно возрастают в сравнении с наклоном спектра $S_v(k)$ при $\epsilon = \epsilon_1$). Согласно рис. 6а и 6б, величины $q(\epsilon)$ в среднем слабо возрастают с увеличением ϵ . Следовательно, наклоны спектров $S_f(k)$ в среднем убывают с увеличением ϵ .

Отметим, что увеличение наклона спектра $S_v(k)$ обусловлено увеличением мощности колебаний v с

малыми $k \in \mathcal{N}_a$ (большими λ) по сравнению с мощностью колебаний v с большими $k \in \mathcal{N}_b$ в модели скопления. Согласно [15], при увеличении ϵ/ϵ_1 от 1 до 2 часть звезд ядра уходит в гало (на периферию скопления), при этом заметно убывает суммарная кинетическая энергия движения звезд ядра при практически неизменной степени нестационарности модели скопления. Следовательно, в динамике модели скопления возрастает роль (и мощность) колебаний гало с большими масштабами и длинами волн.

На рис. 5с и 5д и рис. 6с и 6д приведены зависимости от ϵ коэффициента корреляции $\kappa_{1,2}(\epsilon)$ между спектром $S(k)$, полученным при $\epsilon = \epsilon_1$, и спектром $S(k)$, полученным при произвольном значении ϵ . Зависимости $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ на рис. 5с и 5д, получены при сравнении между собой спектров $S_v(k)$. Согласно рис. 5с, при $n_{st} = 6$ зависимость $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ имеет два локальных минимума при $\epsilon/\epsilon_1 = 1.25, 1.55$, а при $n_{st} = 30$ (рис. 5д) зависимость $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ имеет два наиболее заметных локальных минимума при $\epsilon/\epsilon_1 = 1.1, 1.25$. При $\epsilon < \epsilon_1$ величины $\kappa_{1,2}(\epsilon)$ убывают в сравнении с $\kappa_{1,2}(\epsilon_1)$, что связано с возрастанием погрешностей в вычислении ФКЗ, использованных при расчетах спектров $S(k)$ в данной работе (см. также [15]). Согласно рис. 6с и 6д, величины $\kappa_{1,2}(\epsilon)$, полученные при сравнении между собой спектров $S_f(k)$ с $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon \neq \epsilon_1$, близки к 1 и, в среднем, слабо убывают

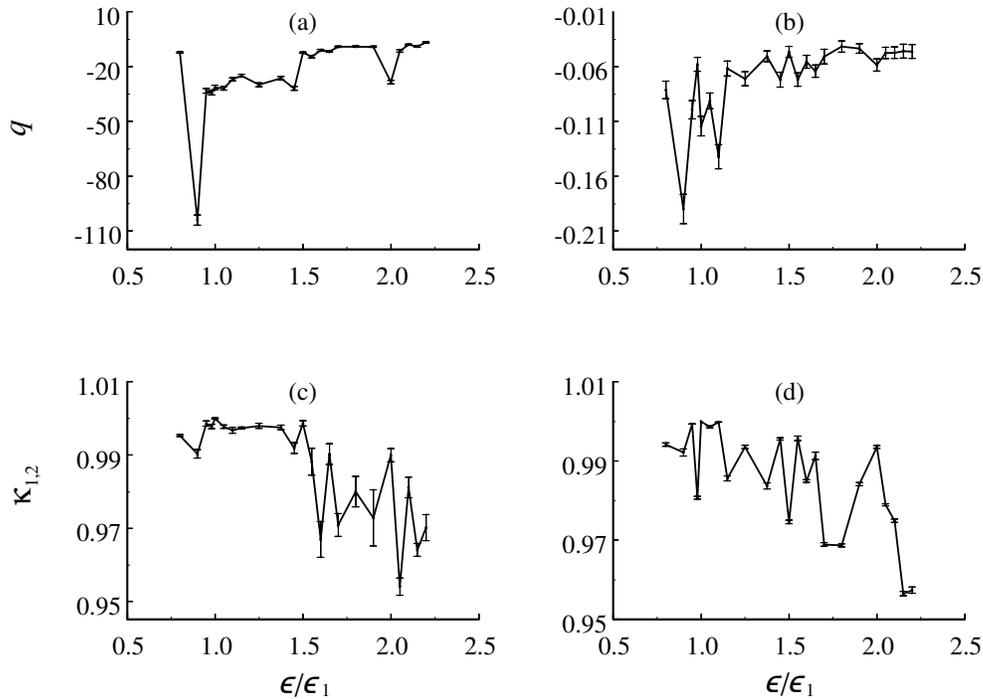


Рис. 6. Зависимости величин q и $\kappa_{1,2}$ от ϵ для колебаний величины f в модели 1 РЗС при $n_{st} = 6$ (a,c) и $n_{st} = 30$ (b,d).

с увеличением ϵ при $\epsilon > \epsilon_1$. Следовательно, в среднем при увеличении ϵ возрастают различия в спектрах $S_f(k)$, полученных при $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon > \epsilon_1$, что, по-видимому, связано с отмеченными выше изменениями в среднем наклонах спектров $S_f(k)$ при увеличении ϵ/ϵ_1 от 1 до 2. Сравнение между собой зависимостей $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ на рис. 6с и 6д данной работы и рис. 5б из работы [15] указывает на то, что спектры волновых чисел колебаний f (и v) при $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon \neq \epsilon_1$ значительно меньше различаются, чем спектры частот колебаний f . В случае спектров $S_v(k)$ заметные отличия $\kappa_{1,2}$ от 1 достигаются лишь вблизи отмеченных выше точек локальных минимумов зависимостей $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ на рис. 5с и 5д данной работы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

(1) В работе выполнен корреляционный и спектральный анализ колебаний фазовой плотности и модулей скорости звезд в 6-и моделях РЗС из [11].

(2) Впервые вычислены пространственные взаимные корреляционные функции для флуктуаций фазовой плотности f и модуля скорости звезды v моделей РЗС, а также спектры волновых чисел колебаний значений f и v в моделях скопления. Для вычисления спектров использовалось пространственное Фурье-преобразование взаимных корреляционных функций при нулевом сдвиге по времени.

(3) Спектр волновых чисел колебаний f оказался более простым по сравнению со спектром волновых чисел колебаний v . Основные по мощности колебания f и v в рассмотренных моделях РЗС расположены в области малых значений волнового числа k (и больших длин волн $\lambda > 0.91-1.25$ пк). Значительный вклад в среднюю мощность колебаний f и v вносят гомологичные колебания скопления. Определены ширины k_e и точки $k = k_m$ наиболее высоких локальных максимумов рассмотренных спектров для каждой модели РЗС (см. таблицы 1 и 2), обсуждаются зависимости ширины спектров от параметров моделей скопления и от числа звезд n_{st} , по данным о которых определяются величины f и v .

(4) Обнаружены повторяющиеся с равным шагом по k колебания v в пяти моделях скопления. Определены точки $k = k_{in}$ первого локального максимума в серии равноотстоящих по k точек локальных максимумов в спектрах колебаний величин v (таблица 1). Получена формула, связывающая между собой длины волн колебаний величины v , наиболее часто встречающихся в спектрах волновых чисел моделей РЗС. Подтверждено предположение работы [15] о дискретном характере длин волн колебаний, формирующихся в моделях РЗС, и о связи этих длин волн с размерами моделей. Спектр волновых чисел колебаний v модели 1 РЗС соответствует спектру системы, значительно более молодой в динамическом отношении, чем система со спектром Колмогорова. Некоторые из

волн колебаний величин f и v , обнаруженных в моделях РЗС в данной работе и в работах [12, 14], вполне могут быть гравитационным аналогом волн Ван Кампена [28] в плазме.

(5) Для модели 1 скопления рассматривались разные значения параметра сглаживания ϵ силовых функций в уравнениях движения звезд. Вычислены «наклоны» q спектров волновых чисел колебаний f и v и их зависимости от ϵ , а также коэффициенты корреляции между спектрами колебаний f и v в модели 1 скопления с разными ϵ . Спектры волновых чисел колебаний f и v в этой модели заметно меньше изменяются при изменении ϵ , чем спектр частот колебаний f , полученный для этой модели в [15]. Увеличение наклона спектра $S_v(k)$ при увеличении ϵ обусловлено изменением строения модели РЗС (т.к. при этом часть звезд ядра уходит в гало и убывает суммарная кинетическая энергия движения звезд ядра при практически неизменной степени нестационарности модели скопления [15]). Увеличение ϵ меньше влияет на спектры $S_f(k)$, чем на спектры $S_v(k)$.

(6) Исследование (Фурье-анализ) радиальных зависимостей модулей средних скоростей (и, вероятно, модулей средних величин компонентов векторов скоростей) движения звезд ряда РЗС из списка [29] способно дать необходимые сведения о длинах волн колебаний скоростей звезд в скоплениях, а также позволит оценить соотношения между длинами этих волн и приливными радиусами скоплений. Сравнение этих оценок с результатами численного моделирования динамики РЗС позволит сделать выводы о динамическом состоянии и параметрах наблюдаемых звездных скоплений (т.к. $R_t \Delta k \simeq 1$, см. таблицу 1 и раздел 3, длины волн двух или нескольких соседних по k колебаний v в скоплениях могут быть использованы для оценок величин R_t и полных масс РЗС).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (базовая часть госзадания, регистрационный номер 01201465056).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. D. Louis and O. E. Gerhard, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **233**, 337 (1988).

2. S. D. Mathur, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **243**, 529 (1990).

3. M. D. Weinberg, Astrophys. J. **421**, 481 (1994).

4. P. O. Vandervoort, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **339**, 537 (2003).

5. J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008).

6. M. Henon, Annales d'Astrophysique **22**, 126 (1959).

7. A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer, New York, 1983).

8. I. R. King, Astron. J. **71**, 64 (1966).

9. Б. Б. Кадомцев, Успехи физических наук **95**, 111 (1968).

10. R. Wielen, Astrophys. and Space Sci. **13**, 300 (1971).

11. V. M. Danilov and L. V. Dorogavtseva, Astronomy Reports **52**, 467 (2008).

12. V. M. Danilov and S. I. Putkov, Astrophysical Bulletin **68**, 154 (2013).

13. В. М. Данилов, С. И. Путков, Вестник Удмуртского университета. Математика. Компьютерные науки, вып. 2, 65 (2013).

14. С. И. Путков, Астрономический циркуляр, № 1604, 1 (2013).

15. V. M. Danilov and S. I. Putkov, Astrophysical Bulletin **69**, 27 (2014).

16. V. M. Danilov, Astronomy Reports **52**, 888 (2008).

17. V. M. Danilov, Astronomy Reports **54**, 514 (2010).

18. S. A. Kutuzov and L. P. Osipkov, Sov. Astron. **24**, 17 (1980).

19. М. Бернар, Ж. Бриффо, Ж. Бюссак и др., в *Диагностика плазмы* (Атомиздат, Москва, 1973), ред. С. Ю. Лукьянов, вып. 3, с. 449.

20. Я. Ф. Волков, В. Г. Дятлов, Р. И. Митина, *Диагностика турбулентной плазмы* (Наук. думка, Киев, 1983).

21. V. M. Danilov, S. I. Putkov, Astronomy Reports **56**, 609 (2012).

22. Дж. Бендат, А. Пирсол *Применения корреляционного и спектрального анализа* (Мир, Москва, 1983).

23. I. R. King, Astron. J. **67**, 471 (1962).

24. Д. Грей, *Наблюдения и анализ звездных фотосфер* (Мир, Москва, 1980).

25. В. Н. Цытович, *Теория турбулентной плазмы* (Атомиздат, Москва, 1971).

26. *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*, ред. В. Е. Фортов (Наука, Москва, 2000), том 1.

27. D. Lynden-Bell, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **136**, 101 (1967).

28. N. G. Van Kampen, Physica **21**, 949 (1955).

29. V. M. Danilov and A. F. Seleznev, Astron. Astrophys. Trans. **6**, 85 (1994).

Wavenumber Spectra of Oscillations of Open Star Cluster Models**V.M. Danilov and S.I. Putkov**

A correlation and spectral analysis of the phase-space density oscillations and oscillations of absolute values of stellar velocities is performed for six open cluster models (for cluster model 1 different smoothing parameters ϵ for force functions in equations of stellar motions is considered). The mutual correlation functions are computed for the fluctuations of phase-space density f and absolute values of stellar velocities v . The spatial Fourier transform of the correlation functions with zero time shift is used to compute the wavenumber spectra of the oscillations of f and v . The wavenumber spectrum of phase-space density oscillations has a more simple structure than the wavenumber spectrum of oscillations of absolute velocities v . The most powerful oscillations of f and v are located in the domain of small wavenumbers k (and large wavelengths $\lambda > 0.91\text{--}1.25$ pc) with homologous cluster oscillations contributing significantly to the mean power of oscillations of f and v . Recurrent oscillations of v at equally spaced k are found in five cluster models. The wavenumber spectra of oscillations of f and v for cluster model 1 are found to depend on ϵ , and the corresponding dependences are analyzed. These wavenumber spectra are found to be appreciably less dependent on ϵ than the frequency spectra of oscillations of f . An increase of ϵ has a weaker effect on the wavenumber spectra of oscillations of f than on those of the oscillations of absolute velocity v . The slope of the wavenumber spectrum increases, on the average, with increasing ϵ because of the change of the radial structure of the cluster model. Astrophysical applications of the results (the dissimilarity of our spectra from the Kolmogorov spectrum, discrete structure of the wavelength spectrum of oscillations of v in five cluster models, widths of the spectra of the most powerful oscillations of cluster models, estimates of cluster tidal radii, etc.) are discussed.

Keywords: *stars: kinematics and dynamics—open clusters and associations: general*