

УДК 524.4-32

СГЛАЖИВАНИЕ СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ МОДЕЛИ РАССЕЯННОГО ЗВЕЗДНОГО СКОПЛЕНИЯ

© 2014 В. М. Данилов*, С. И. Путков**

Коуровская астрономическая обсерватория, Уральский федеральный университет,
Екатеринбург, 620000 Россия

Поступила в редакцию 26 августа 2013 года; принята в печать 3 декабря 2013 года

В работе выполнен корреляционный и спектральный анализ колебаний фазовой плотности и потенциала в модели рассеянного звездного скопления при разных значениях параметра сглаживания ϵ силовых функций в уравнениях движения звезд скопления. Вычислены взаимные корреляционные функции для флуктуаций потенциала U и фазовой плотности f модели скопления для разных расстояний от его центра. Для вычисления спектров мощностей и дисперсионных кривых колебаний значений U и f использовалось Фурье-преобразование взаимных корреляционных функций. Спектр колебаний U оказался более простым по сравнению со спектром колебаний f . Основные по мощности колебания U связаны с колебаниями f и расположены на низких частотах $\nu < 3/\tau_{v.r.}$; на средних и высоких частотах ($\nu > 3/\tau_{v.r.}$) вклад колебаний U в формирование колебаний f мал или равен нулю (здесь $\tau_{v.r.}$ — время бурной релаксации скопления). Обнаружен ряд неустойчивых колебаний U в ядре модели скопления (до 30 пар колебаний с разными комплексно-сопряженными частотами). Обнаружены и исследованы зависимости спектров и дисперсионных кривых колебаний f и U от ϵ . Обнаружены “повторяемость” (значительная коррелированность) спектров при некоторых значениях ϵ и неустойчивость формы дисперсионной кривой к малым изменениям ϵ . Обсуждаются астрофизические приложения полученных результатов: распад в ядре скопления волны колебаний f , бегущей с периферии скопления к его центру, на несколько волн с частотами, соизмеримыми с частотой внешнего (приливного) воздействия; излучение и отражение волн колебаний f и U вблизи границы ядра скопления; возможная дискретность длин волн и фаз колебаний f и U в модели скопления.

Ключевые слова: *звезды: кинематика и динамика—рассеянные скопления и ассоциации*

1. ВВЕДЕНИЕ

Сглаживание силовых функций в уравнениях движения звезд часто используется при моделировании динамики гравитирующих систем, см., например, [1–7]. Такой подход значительно облегчает численное интегрирование уравнений движения звезд, но при этом исключаются из рассмотрения наиболее тесные сближения звезд с взаимными расстояниями $r_{ij} < \epsilon$, а потенциал системы чаще всего рассматривается в виде $U(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N Gm_j / \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2 + \epsilon^2}$ (здесь ϵ — параметр сглаживания, \mathbf{r} — радиус-вектор точки, N — число звезд, m_j — масса звезды с номером $j \in [1, N]$). В этом случае точечный потенциал отдельной звезды заменяется потенциалом сферы Пламмера. В качестве обоснования такого сглаживания обычно используется следующая аргументация: при достаточно малых ϵ тесные сближения звезд с взаимными расстояниями

$r_{ij} < \epsilon$ достаточно редки, а оценки вклада таких сближений в релаксацию системы за счет парных сближений оказываются незначительными (см., например, [8]). С использованием сглаживания силовых функций в работах [2–6] проводилось изучение экспоненциальной неустойчивости задачи N тел (впервые признание экспоненциальной неустойчивости таких систем сделано в работе [9]). Согласно [2–5], время t_e возрастания начальных возмущений траекторий звезд в e раз сравнимо с временем t_{cr} пересечения звездой системы или несколько меньше. Величина t_e/t_{cr} слабо убывает с увеличением N , если сглаживание достаточно мало. Согласно оценкам работ [6, 10], выполненным при $N < 10^3$ и при $N \lesssim 10^5$, величина $t_e/t_{cr} \sim 1/\ln N$ или $t_e/t_{cr} \sim 1/\ln(\ln N)$. Увеличение ϵ приводит к увеличению t_e/t_{cr} и к снижению скорости нарастания возмущений в системе [4–6].

В работах [8, 11–14] обсуждались и использовались для моделирования бесстолкновительных звездных систем оптимальные значения $\epsilon = \epsilon_{opt}$,

*E-mail: Vladimir.Danilov@usu.ru

**E-mail: Putkov_S@mail.ru

впервые полученные в [11] из условия минимальности средней иррегулярной силы, действующей на звезду. Согласно [11], при больших значениях $\epsilon > \epsilon_{\text{opt}}$ значительно искажается потенциал системы и уменьшается пространственное разрешение и “зернистость” потенциала. При $\epsilon < \epsilon_{\text{opt}}$ флуктуации сил в системе возрастают, и она перестает быть бесстолкновительной. Согласно [11, 12], величина ϵ_{opt} зависит от распределения плотности в модели системы и убывает с увеличением числа звезд N в системе. В работе [12] рассмотрены три разные модели распределения плотности массы в системе и показано, что в системах с большей концентрацией масс к центру величина ϵ_{opt} может быть уменьшена. В [12] рассмотрены также два разных типа сглаживания потенциала точечной массы: с помощью обобщенного потенциала Пламмера (см. формулу (11) из [12]) и кубического сплайна, предложенного в [13]. Согласно [12], эти типы сглаживания в некоторых случаях могут давать лучшее представление сил в системе, чем сглаживание потенциалом стандартной сферы Пламмера. В работе [8] при моделировании бесстолкновительных систем предлагается использовать адаптивно меняющиеся ϵ в зависимости от среднего расстояния между звездами в данной точке системы. Такой подход позволяет построить существенно лучшее приближение систем многих тел к моделям бесстолкновительных систем, полученным с помощью соответствующего уравнения Больцмана [8]. Согласно [14], такой подход в численных экспериментах приводит к изменению полной энергии системы многих тел со временем t (для сферически-симметричных равновесных устойчивых моделей гравитирующих систем в [14] предлагается получать величину ϵ_{opt} исходя из анализа изменений со временем функций распределения систем многих тел при различных ϵ). В работе [15] рассмотрены изменения функции Лагранжа системы, приводящие к сохранению энергии (и углового момента) в задаче многих тел. Для этого в [15] предлагается ввести малую добавку к силе взаимодействия двух звезд, связанную с градиентом сглаживающего параметра по пространственным координатам (сходная идея рассматривалась и в работе [16]). Согласно выполненным в работе [15] вычислениям (см. Рис. 6 и 7 из [15]), такой подход приводит к изменениям распределения плотности и постоянной энергии системы в сравнении со случаем неадаптивного $\epsilon = \text{const}$.

Представляет интерес изучение зависимостей параметров моделей рассеянных звездных скоплений (РЗС) [17] от величины ϵ со значительно меньшими значениями $\epsilon = 0.012 \bar{r}_{ij}$, использованными в работах [7, 17] (здесь r_{ij} — расстояние между двумя звездами с номерами i и j в скоплении, $i, j \in [1, N]$, \bar{r}_{ij} — среднее по всем парам звезд

начальное значение r_{ij} для модели скопления). В этом случае средняя по шести моделям скоплений из [17] величина ϵ составляет $\epsilon \simeq 0.084 \pm 0.005$ пк, что значительно меньше как среднего прицельного расстояния $p_2 \simeq R/N^{1/2} \simeq 0.45$ пк доминирующего парного сближения звезд, так и среднего расстояния между звездами $p_1 \simeq R/N^{1/3} \simeq 1.32$ пк (здесь R — радиус скопления). Согласно оценкам [1, 6], условия $p_1 > \epsilon > p_2$ позволяют сглаживать силы парных взаимодействий между звездами без заметного ослабления пространственного разрешения потенциала и экспоненциальной неустойчивости [9] в системе многих тел. По данным Таблицы 2 из [18] можно получить среднее по периоду колебаний регулярного поля расстояние δ_r между звездами вблизи центра модели скопления. В среднем по моделям РЗС [17] величина δ_r составляет $\delta_r \simeq 1.11 \pm 0.10$ пк. В этом случае $\delta_r/\epsilon \simeq 13.2 \pm 1.4$. Таким образом, величина ϵ в моделях РЗС [17] значительно меньше величин p_i и δ_r , что указывает на вполне “столкновительный” характер этих моделей (лишь достаточно редкие тесные сближения звезд с $r_{ij} < \epsilon$ в моделях РЗС [17] не учитываются). Отметим, что в работе [15] рассматривались лишь изменения радиальных распределений плотности и полной энергии изолированной гравитирующей системы при изменениях ϵ . Представляет интерес и анализ влияния изменений ϵ на степень нестационарности модели РЗС, плотность числа звезд и кинетическую энергию звезд ядра скопления в присутствии внешнего поля Галактики. Эти характеристики скопления могут влиять на формирование спектров колебаний величин фазовой плотности f и потенциала U скопления, а также на дисперсионные кривые этих колебаний и на оценки параметров таких колебаний. Анализ изменений спектров и дисперсионных кривых колебаний величин f и U в зависимости от изменений ϵ для моделей РЗС ранее не проводился. Такой анализ представляет значительный интерес, т. к. он дает дополнительную информацию о характере, параметрах и причинах формирования стоячих и бегущих волн колебаний величин f и U в моделях РЗС с разными ϵ .

Спектры и дисперсионные кривые колебаний величины f в рамках численных экспериментов по моделированию динамики РЗС впервые были получены в работах [19, 20]. Для этого использовались методы диагностики турбулентной плазмы, рассмотренные в работах [21, 22]. Согласно [21, 22], взаимные корреляционные функции флуктуаций ряда характеристик плазмы в двух точках на расстоянии r друг от друга могут быть использованы для построения дисперсионных кривых и анализа неустойчивостей колебаний в плазме. Использование такого метода в работах [19, 20]

для построения частотных спектров (спектров мощности) и исследования ряда неустойчивостей колебаний величин f в моделях РЗС [17] позволило обнаружить ряд новых неустойчивых колебаний фазовой плотности в этих моделях (до 32–41 пары колебаний с разными комплексно-сопряженными частотами в каждой модели) и оценить параметры этих колебаний. Для модели 1 РЗС был получен наиболее сложный спектр колебаний величины f , что, согласно [19, 20], является одним из признаков слабой турбулентности в движениях звезд в этой модели скопления. Поскольку величина ϵ в уравнениях движения звезд появляется благодаря потенциалу U (см. выше), то представляет интерес и анализ колебаний величины U в этой модели скопления. Сравнение между собой спектров колебаний величин f и U в модели 1 РЗС из [17] позволяет изучить вопрос о степени связи между собой колебаний f и U с разными циклическими частотами ν (далее частоты ν приведены в единицах $\tau_{v,r}^{-1}$ и равны числу колебаний f (или U) за время бурной релаксации модели скопления $\tau_{v,r}$).

Согласно [19], наименьшие и близкие к ним частоты колебаний фазовой плотности f вблизи центров моделей РЗС не равны частоте ν_G обращений РЗС вокруг центра Галактики, а находятся приблизительно в рациональном отношении с ней. Например, в модели 1 частоты трех таких колебаний составляют приблизительно 3/5, 20/13 и 12/5 от $\nu_G \simeq 0.225$. Сходная ситуация и в других моделях РЗС из [17]. Поэтому в [19, 20] сделан вывод о возможном влиянии внешнего поля Галактики на эту часть спектра колебаний f . Величина ν_G в большей степени характеризует частоту прилива, т. е. связана с изменениями плотности на периферии моделей РЗС. Соответствующие внешнему воздействию на скопление частоты колебаний фазовой плотности на разных расстояниях от центров моделей могут отличаться от ν_G . Бегущие к центру скопления ($k_\nu < 0$, k_ν — волновое число) волны колебаний f с частотой ν_G или близкой к ней наблюдаются на всех рассмотренных в [19] расстояниях r от центра скопления. По-видимому, при прохождении таких волн к центру скопления характеристики волн меняются, происходит распад волны на несколько составляющих с соизмеримыми частотами. В модели 1 колебания с частотой ν_G являются устойчивыми при $r = 3$ –9 пк и, вероятно, при $r > 9$ пк. Неустойчивость, а затем и распад таких колебаний на соизмеримые по частоте неустойчивые колебания, имеют место при $r < 3$ пк.

В моделях РЗС [17] движение волн колебаний f с некоторыми частотами ν вблизи некоторых расстояний r от центра скопления имеет необычный характер. Например, в модели 1 вблизи расстояния $r = 3$ пк (приблизительно граница ядра) на частотах, близких к $\nu = 0.34, 1.81$, наблюдаются стоячие

волны колебаний фазовой плотности ($k_\nu = 0$). При $r = 2.7$ пк волны на частотах $\nu = 0.34, 1.81$ становятся бегущими к центру скопления (см. Рис. 1а). При $r > 3.3$ пк на этих частотах формируются волны, бегущие от центра скопления (Рис. 1б, $k_\nu > 0$). Аналогичное явление можно наблюдать вблизи расстояний от центра $r = 3.3$ –3.4 пк на частоте $\nu \simeq 3.6$ (см. Рис. 1б).

Возможно, здесь происходит отражение бегущих волн от границы ядра скопления, причем три стоячие волны формируют одну бегущую. Средняя по частоте ν стоячая волна при $r = 3$ пк находится в области с аномальной дисперсией (где k_ν убывает с увеличением ν ; величина k_ν получена с использованием программ вычислений дисперсионных кривых $k_\nu = k(\nu)$ из работы [19]). Отметим, что бегущие волны иногда могут быть представлены как суперпозиция стоячих волн с такой же длиной волны, как и у бегущей волны (см. [23], с. 223).

Вполне вероятной причиной таких изменений характеристик волн фазовой плотности вблизи $r = 3$ пк в модели 1 может быть излучение таких волн в противоположных по r направлениях от границы ядра скопления, испытывающего радиальные колебания и определяющего степень нестационарности модели [24, 25].

Вероятно, в моделях РЗС может существовать как отражение, так и излучение волн на соответствующих этим волнам частотах ν и на некоторых расстояниях r от центра скопления (это наводит на мысль о возможном квантовании таких волн и о существовании определенных соотношений между размерами скопления и возможными длинами λ стоячих волн в скоплении, т. к. в системах конечных размеров по r может быть размещено лишь целое число величин $\lambda/2$, см., например, [23], с.64–66). Представляет интерес изучение наблюдаемых проявлений дискретности формирующихся длин волн и фаз колебаний фазовой плотности f в моделях РЗС с различными значениями ϵ .

Целями данной работы являются: 1) вычисление ряда структурно-динамических характеристик ядра модели 1 РЗС из [17] при разных значениях сглаживающего параметра ϵ ; 2) вычисление взаимных корреляционных функций, частотных спектров и дисперсионных кривых для флуктуаций фазовой плотности f и потенциала U в этой модели скопления при разных значениях ϵ ; 3) использование полученных результатов для анализа динамики РЗС и их моделей.

2. О СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ РЗС С ВЕЛИЧИНОЙ ϵ

В работе [17] рассмотрены модели скопления, состоящего из $N = 500$ звезд с массами, равными

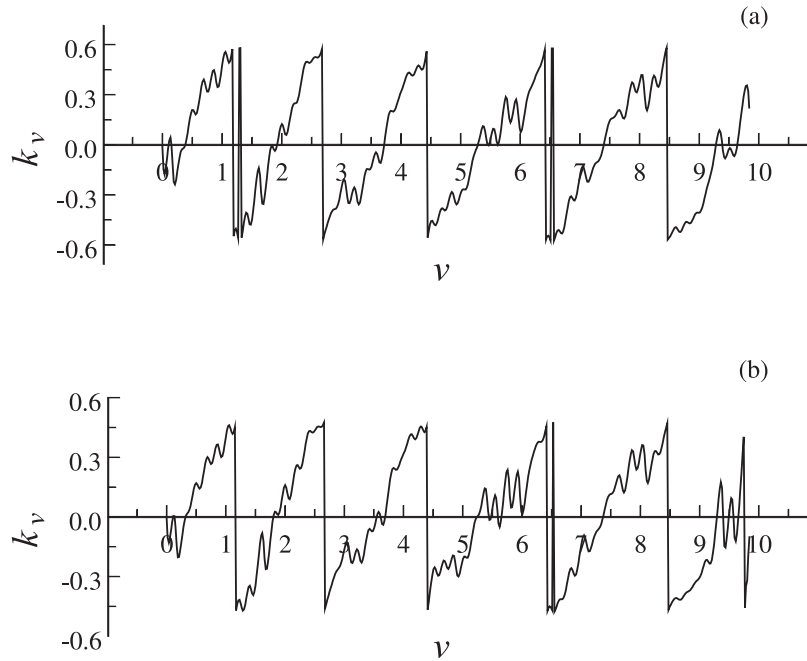


Рис. 1. Зависимости величин k_ν от ν для колебаний f в модели 1 РЗС при $n_p = 483$, $n_{st} = 30$: (а) кривая получена при $r = 2.7$ пк, (б) то же при $r = 3.3$ пк.

солнечной, движущегося по круговой орбите радиуса $R_G = 8200$ пк в плоскости Галактики вокруг её центра (использовалась модель потенциала Галактики из работы [26]). Начальные параметры этих численных динамических моделей РЗС приведены в Таблице 1 работы [27]. В работах [17, 27] модели 1–6 скоплений звезд пронумерованы в порядке убывания степени нестационарности модели в регулярном поле. Каждая модель в исходном состоянии состоит из двух однородных по плотности сферических подсистем (ядро и гало) с совпадающими центрами масс. Начальные параметры R_1/R_2 и N_1/N_2 этих моделей удовлетворяют полученному из наблюдений [28] соотношению $R_1/R_2 \simeq 0.39 (N_1/N_2)^{0.35}$, где R_l и N_l — радиус и число звезд ядра ($l = 1$) и гало ($l = 2$) скопления.

Рассмотрим влияние сглаживания силовых функций в правых частях уравнений движения звезд на эволюцию модели 1 из [17]. Для этой модели использовались следующие начальные значения: $R_1/R_2 = 0.24$, $N_1/N_2 = 0.25$, $R_2/R_t = 0.9$ (см. Таблицу 1 из [17]). Здесь R_t — приливный радиус скопления в поле Галактики [10]. По данным каталога структурно-динамических параметров РЗС [28] легко выделить четырнадцать рассеянных скоплений с близкими к указанным для модели 1 значениями R_1/R_2 и N_1/N_2 . Средние по этим четырнадцати РЗС величины R_1/R_2 и N_1/N_2 составляют: $\overline{R_1/R_2} = 0.21 \pm 0.04$ и $\overline{N_1/N_2} = 0.26 \pm 0.03$.

Здесь в качестве погрешностей приведены среднеквадратические отклонения величин R_1/R_2 и N_1/N_2 от их средних значений. Параметры семи РЗС с наиболее близкими к указанным для модели 1 значениями R_1/R_2 , N_1/N_2 , R_2/R_t приведены в таблице (использовались Таблицы 2.2 и 3 из Приложения в [28], величина R_2 принята равной радиусу скопления).

Согласно таблице, наиболее близкие значения R_2/R_t РЗС к начальной величине R_2/R_t модели 1 получены для скоплений NGC 2126, NGC 2186, NGC 7235. Отметим, что в модели 1 при $t \in [0, P_r]$ величина $R_2(t) \leq R_2(0)$, $R_t(t) \simeq R_t(0)$ (P_r — пери-

Параметры РЗС

Название	R_1/R_2	N_1/N_2	R_2/R_t
NGC 1960	0.23	0.28	0.56 ± 0.05
NGC 2126	0.20	0.27	0.80 ± 0.10
NGC 2186	0.17	0.24	0.74 ± 0.11
NGC 6830	0.29	0.22	0.67
NGC 6910	0.21	0.25	0.58 ± 0.08
NGC 7235	0.20	0.23	0.69 ± 0.07
NGC 7790	0.18	0.29	0.67 ± 0.06

од колебаний регулярного поля модели скопления, $P_T \simeq 0.6 \tau_{v.r.}$, см. [17]). При $t \in [0, 0.5 P_T]$ величина R_2 и средний радиус скопления $\langle r \rangle$ в модели 1 убывают с увеличением t . Величина $\langle r \rangle$ при $t \in [0, 0.5 P_T]$ убывает от 6.03 пк до 4.9 пк, затем возрастает до 5.4 пк при $t \simeq P_T$ и затем, испытывая колебания, убывает до значений 4.40–4.46 пк при $t \simeq 3 \tau_{v.r.}$; величина $\langle r \rangle$ получена в [17] по звездам с расстояниями r от центра модели скопления $r \leq R_t(0)$. При $t > P_T$ для модели 1 РЗС величина $R_2 > R_2(0)$ и возрастает с увеличением t . Однако плотность числа звезд на периферии модели 1 (при $r > R_2(0)$) уже становится малой и сравнима с флуктуациями плотности числа звезд фона в окрестностях реальных скоплений. Влияние таких флуктуаций на оценки размеров скоплений приводит к тому, что величины R_2 (и R_2/R_t) для реальных РЗС в [28] и в нашей таблице могут быть занижены. Таким образом, начальное значение R_2/R_t для модели 1 вполне согласуется с наибольшими значениями этих величин для реальных РЗС с параметрами структуры гало–ядро R_1/R_2 и N_1/N_2 , близкими к принятым для модели 1 скопления. В работах [17, 27] модель 1 скопления использовалась для описания финальных стадий динамической эволюции РЗС, т. к. она демонстрирует наибольшую (из моделей 1–6 РЗС) степень нестационарности в поле регулярных сил и самый быстрый распад в поле Галактики.

Расчеты фазовых координат звезд (ФКЗ) моделей РЗС в работе [17] были выполнены путем интегрирования уравнений движения звезд с использованием разностных схем десятого и одиннадцатого порядков точности на интервале времени $t \in [0, t_m]$, где $t_m \simeq 5.1 \tau_{v.r.}$. Пусть t_0 — промежуток времени динамической эволюции модели РЗС, в течение которого выполняется статистический критерий точности вычислений фазовой плотности [29]. Вблизи центров моделей РЗС [17] величина $t_0/\tau_{v.r.}$ составляет $t_0/\tau_{v.r.} \simeq 3.0$ – 3.9 , а на периферии моделей $t_0/\tau_{v.r.} \simeq 3.6$ – 5.1 . Максимальная относительная погрешность вычисления энергии скопления, достигнутая на промежутке времени t_m в моделях [17], по модулю составляла $(1-4) \times 10^{-13}$, а точность вычисления функции фазовой плотности (ФФП) скопления на промежутке времени t_0 можно считать достаточной для выводов о статистических свойствах ФФП. При $t \in [0, t_0]$ точность полученных в [30] распределений корреляций оказывается достаточной для выводов о свойствах этих распределений. Согласно [19], сравнение между собой взаимных корреляционных функций, спектров колебаний или дисперсионных кривых, полученных методами десятого и одиннадцатого порядков точности, также дает эффективный метод контроля результатов вычислений.

Пусть $\epsilon = \epsilon_1 = 0.012 \overline{r_{ij}}$, (модели РЗС в [17] получены с использованием значений $\epsilon = \epsilon_1$). В момент времени t вириальный коэффициент модели скопления $\alpha = 2E/W$, где E и W — полная и потенциальная энергии скопления (в формулах для E и W не учитывается влияние внешнего поля Галактики на скопление). В дальнейшем мы будем использовать величину α , полученную по звездам с расстояниями $r \leq R_t$ от центра скопления. Рассмотрим эволюцию модели скопления при $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon = 2\epsilon_1 = \epsilon_2$ на промежутке времени $t \in [0, 3 \tau_{v.r.}]$. Средние по t значения α равны: $\alpha_{\epsilon_1} = 0.410 \pm 0.002$ и $\alpha_{\epsilon_2} = 0.401 \pm 0.002$ для ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Пусть $\sigma'(\alpha_\epsilon)$ — среднеквадратичные отклонения величин α от средних по $t \in [t', t' + P_T]$ величин α для заданного значения ϵ , где $t' \in [0, (3 \tau_{v.r.} - P_T)]$, P_T — период колебаний регулярного поля в модели скопления. Средние по всем t' величины $\sigma'(\alpha_\epsilon)$ равны: $\sigma(\alpha_{\epsilon_1}) = 0.122 \pm 0.026$ и $\sigma(\alpha_{\epsilon_2}) = 0.116 \pm 0.035$ для ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Рассматривая $\sigma(\alpha_\epsilon)$ как оценку величины $\delta\alpha$ — амплитуды колебаний значений α , находим: $\delta\alpha_{\epsilon_1}/\delta\alpha_{\epsilon_2} = 1.06 \pm 0.39$. Величины $\delta\alpha$ в моделях РЗС [17] характеризуют степень нестационарности моделей в регулярном поле. Таким образом, увеличение ϵ в два раза не приводит к статистически значимому изменению степени нестационарности модели 1 скопления.

Пусть $T_{i,\epsilon}$ — средний по $t \in [0, 3 \tau_{v.r.}]$ квадрат скорости звезды, полученный по звездам с расстояниями $r \leq i$ пк от центра модели скопления при $i = 1, 2, 5$ для заданного значения ϵ . По данным о фазовых координатах звезд модели скопления при $t \in [0, 3 \tau_{v.r.}]$, находим: $T_{1,\epsilon_1}/T_{1,\epsilon_2} = 1.13 \pm 0.06$, $T_{2,\epsilon_1}/T_{2,\epsilon_2} = 1.07 \pm 0.02$, $T_{5,\epsilon_1}/T_{5,\epsilon_2} = 1.05 \pm 0.01$. Следовательно, с увеличением ϵ в два раза величина $T_{i,\epsilon}$ заметно, примерно на 13–7%, убывает в ядре скопления (при $i = 1, 2$).

Пусть величины $N_{i,\epsilon}$, $\rho_{i,\epsilon}$, $R_{i,\epsilon}$ соответствуют средним по $t \in [0, 3 \tau_{v.r.}]$ числу звезд, концентрации и среднему радиусу группы звезд с расстояниями $r \leq i$ пк от центра модели скопления для заданного значения ϵ . По данным о координатах звезд модели скопления при $t \in [0, 3 \tau_{v.r.}]$, находим: $N_{1,\epsilon_1}/N_{1,\epsilon_2} = 1.40 \pm 0.14$, $N_{2,\epsilon_1}/N_{2,\epsilon_2} = 1.12 \pm 0.03$, $N_{5,\epsilon_1}/N_{5,\epsilon_2} = 1.013 \pm 0.005$. Таким образом, при увеличении ϵ в два раза число звезд $N_{i,\epsilon}$ заметно (на величину около 40–12%) убывает в ядре скопления. При этом средний радиус $R_{i,\epsilon}$ очень мало меняется (в ядре модели скопления изменения $R_{i,\epsilon}$ находятся в пределах погрешностей величин $R_{i,\epsilon}$). Кроме того, $\rho_{1,\epsilon_1}/\rho_{1,\epsilon_2} = 1.35 \pm 0.16$, $\rho_{2,\epsilon_1}/\rho_{2,\epsilon_2} = 1.14 \pm 0.04$, $\rho_{5,\epsilon_1}/\rho_{5,\epsilon_2} = 1.08 \pm 0.02$. Поэтому при увеличении ϵ в два раза концентрация

звезд $\rho_{i,\epsilon}$ также убывает на 35–14% в ядре скопления, часть звезд из ядра уходит на периферию скопления.

Пусть $K_{i,\epsilon}$ — суммарная кинетическая энергия звезд с расстояниями $r \leq i$ пк от центра модели скопления для заданного значения ϵ . В ходе эволюции модели скопления величины $K_{i,\epsilon}$ испытывают колебания относительно средних по t величин $\overline{K}_{i,\epsilon}$. По данным о фазовых координатах звезд находим: $\overline{K}_{1,\epsilon_1}/\overline{K}_{1,\epsilon_2} = 1.8 \pm 0.3$, $\overline{K}_{2,\epsilon_1}/\overline{K}_{2,\epsilon_2} = 1.21 \pm 0.04$, $\overline{K}_{5,\epsilon_1}/\overline{K}_{5,\epsilon_2} = 1.07 \pm 0.01$. Таким образом, суммарная кинетическая энергия движения звезд в ядре модели скопления существенно убывает при увеличении ϵ в два раза.

Пусть $\sigma(K_{i,\epsilon})$ — среднеквадратическое отклонение $K_{i,\epsilon}$ от $\overline{K}_{i,\epsilon}$ при $t \in [0, 3\tau_{v.r.}]$. Величину $\sigma(K_{i,\epsilon})$ можно рассматривать как оценку амплитуды колебаний величины $K_{i,\epsilon}$ на интервале $t \in [0, 3\tau_{v.r.}]$. Пусть $z_i = \frac{\sigma(K_{i,\epsilon_2})/\overline{K}_{i,\epsilon_2}}{\sigma(K_{i,\epsilon_1})/\overline{K}_{i,\epsilon_1}}$. По данным о фазовых координатах звезд находим: $z_1 = 1.1 \pm 0.5$, $z_2 = 1.3 \pm 0.7$, $z_5 = 1.1 \pm 0.7$. Возможно, при увеличении ϵ в два раза, величины $\sigma(K_{i,\epsilon})/\overline{K}_{i,\epsilon}$ в среднем возрастают в ядре скопления. Однако погрешности величин z_i достаточно велики, что не позволяет уверенно утверждать это.

Таким образом, при увеличении ϵ в два раза степень нестационарности модели 1 скопления [17] практически не изменяется, в ядре модели заметно убывают суммарная кинетическая энергия звезд $K_{i,\epsilon}$, число звезд $N_{i,\epsilon}$, концентрация звезд $\rho_{i,\epsilon}$ и средний квадрат скорости движения звезд $T_{i,\epsilon}$; средние радиусы групп звезд $R_{i,\epsilon}$ и величины $\sigma(K_{i,\epsilon})/\overline{K}_{i,\epsilon}$ меняются лишь в пределах погрешностей. Следовательно, изменение ϵ в два раза существенно меняет строение и некоторые важные динамические параметры модели скопления. Поэтому такое изменение ϵ для данной модели РЗС можно считать значительным.

3. ВЗАИМНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИЙ

Пусть $\mathbf{X}(t, \mathbf{r}) = (X_1, X_2) = \mathbf{y}(t, \mathbf{r}) - \overline{\mathbf{y}(t, \mathbf{r})}$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (f, U)$, величина f получена по n_{st} звездам из окрестностей точки с координатой \mathbf{r} в модели скопления, а черта сверху означает усреднение по времени $t \in [0, t_m]$ (начало системы координат \mathbf{r} совпадает с центром масс скопления, t_m — наибольшее значение t , используемое для расчета корреляций). Для краткости здесь аргумент \mathbf{v} у функций f и X_1 не записан. Величина \mathbf{X} обычно называется отклонением (или флуктуацией) величины \mathbf{y} (см. [19, 21, 22]) и предполагается случайной переменной, образующей стационарный случайный

процесс. В отличие от f и X_1 величины U и X_2 в точке \mathbf{r} определяются всеми звездами скопления. Следуя работам [19, 21, 22], обозначим функцию взаимной корреляции флуктуаций величины \mathbf{y} как $\mathbf{C}(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$, где координаты вектора \mathbf{C} имеют вид:

$$C_j(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}) = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} X_j(t, \mathbf{r}) X_j(t + \tau, \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) dt, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь τ — временная задержка. Пусть $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ — координаты точек 1 и 2, в которых рассматриваются флуктуации X_j . В общем случае функции $C_j(\tau, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$ могут быть записаны в виде пределов по t_m при $t_m \rightarrow \infty$ от выражений в правых частях соотношений типа (1).

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $|\Delta\mathbf{r}| = r$. В этом случае расстояния двух точек 1 и 2 от центра скопления равны 0 и r соответственно. Следуя [22], обозначим функции (1) как $C_{j,12}(\tau, r)$ и рассмотрим флуктуацию X_j в виде волнового пакета, распространяющегося в радиальном направлении относительно центра скопления:

$$X_j(t, r) = \int_0^\infty A_j(\omega) \exp[i(rk_j(\omega) - \omega t)] d\omega, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь амплитуда $A_j(\omega)$ и волновое число $k_j(\omega)$ волн, составляющих пакет, зависят от частоты этих волн ω , $i = \sqrt{-1}$. В случае (2) Фурье-преобразование функции $C_{j,12}(\tau, r)$ можно записать в следующем виде:

$$F_{1,j}(\omega) = F_j(\omega) \exp(ir k_j(\omega)),$$

(см. также формулы (3.41) или (4.8)–(4.11) из книги Бендата, Пирсола [31]); $F_j(\omega)$ — Фурье-преобразование для автокорреляционной функции флуктуаций X_j в точке 1 (или 2), записанной с помощью (1) при $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (см. (2) из [19]). Таким образом, рассматривая Фурье-преобразование функции $C_{j,12}(\tau, r)$, можно найти $|F_{1,j}(\omega)| = F_j(\omega)$ (спектр частоты) и $\frac{1}{r} \text{Arg}(F_{1,j}(\omega)) = k_j(\omega)$ (дисперсионное соотношение). $r k_j(\omega) \in [-\pi/2, \pi/2]$ — фаза колебания y_j с частотой ω .

В данной работе были рассмотрены ряд положений точки 2 на сфере радиуса r с центром в центре масс скопления. Для этого в сферической системе координат (r, θ, ϕ) с шагом $\Delta\theta = \Delta\phi = \pi/(4k)$ были заданы координаты этих точек при $k = 1, 2, 4$ и выполнен переход к правой

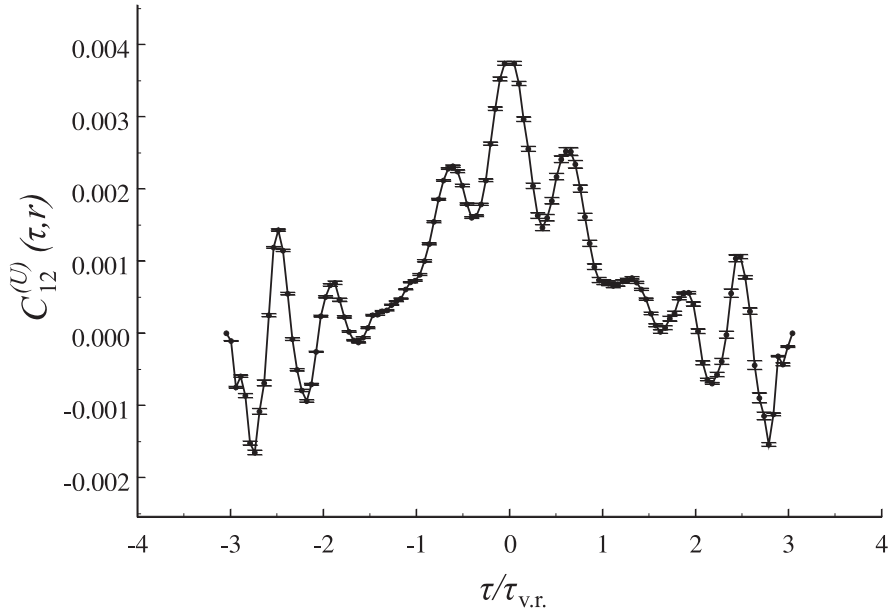


Рис. 2. Взаимная корреляционная функция колебаний потенциала U для модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_p = 483$.

декартовой прямоугольной системе координат (ξ, η, ζ) с началом в центре масс скопления (ось ζ направлена перпендикулярно плоскости Галактики, ось ξ — от центра Галактики в плоскости Галактики, а ось η — в направлении движения скопления в плоскости Галактики). Вместе с точкой 1 общее число точек n_p , в окрестностях которых рассматриваются флуктуации, \mathbf{X} равно $n_p = 27, 115, 483$ при $k = 1, 2, 4$ соответственно.

График средних значений функции $C_{12}^{(U)} = C_{2,12}(\tau, r)$ для модели 1 при $r = 1$ пк, $n_p = 483$ в случае $t_m = t_0$, где $t_0 \simeq 3\tau_{v,r}$, приведен на Рис. 2. Усреднение величин $C_{12}^{(U)}$ выполнено по 482 значениям $C_{12}^{(U)}$, соответствующим разным положениям точки 2 на сфере радиуса $r = 1$ пк. Вертикальными барами на Рис. 2 показаны погрешности соответствующих средних значений $C_{12}^{(U)}$. При построении Рис. 2 использовались ФКЗ одиннадцатого порядка точности (при вычислении кривой на Рис. 2 использовались лишь ФКЗ, полученные при $t \leq t_0$; усреднение величин U и X_2 по t проводилось в интервалах: $t \in [0, t_0 - \tau]$ при $\tau > 0$ и $t \in [-\tau, t_0]$ при $\tau < 0$). Отметим несимметричность функции $C_{12}^{(U)}$ относительно $\tau = 0$, поэтому спектр частот задается не только действительной частью преобразования Фурье для функции $C_{12}^{(U)}$ (см. [31], стр. 61). В сравнении с $C_{12}^{(f)} = C_{1,12}(\tau, r)$ (см. Рис. 2а из [19]), функция $C_{12}^{(U)}$ заметно более симметрична, что приводит к

значительно большему вкладу в спектр колебаний величины U действительной части Фурье-преобразования функции $C_{12}^{(U)}$.

На рис. 2 заметен ряд локальных экстремумов функции $C_{12}^{(U)}$, выходящих за пределы погрешностей величин $C_{12}^{(U)}$ в точках $\tau_j = P_j$, что указывает на существование повышенных взаимных корреляций (разного знака) между колебаниями U с периодами P_j в окрестностях точек 1 и 2.

4. ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ И ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ

Для вычисления спектров частот и дисперсионных кривых флуктуаций величин y в модели 1 РЗС мы использовали программу быстрого преобразования Фурье (БПФ) из книги Грея [32]. Вместо круговых частот ω здесь удобнее использовать циклические частоты $\nu = \omega/(2\pi)$. Отдельно вычислялись Фурье-преобразования $\mathcal{F}_{1,j}(\nu)$ и $\sigma_{\mathcal{F},j}(\nu)$ для средних величин $C_{j,12}(\tau, r)$ и их погрешностей $\sigma_{C_j}(\tau, r)$. Затем вычислялись относительные фазы (волновые числа) флуктуаций величины y_j : $k_{\nu,j}^{(0)} = \frac{1}{r} \text{Arg}(\mathcal{F}_{1,j}(\nu))$ и $k_{\nu,j}^{(1,2)} = \frac{1}{r} \text{Arg}(\mathcal{F}_{1,j}(\nu) \pm \sigma_{\mathcal{F},j}(\nu))$ при $j = 1, 2$. Комплексно-сопряженные пары корней $\nu_l = \nu_{re,l} \pm i\nu_{im,l}$ уравнения $k_{\nu,l}^{(0)} = 0$ позволяют определить период $P_l = 1/\nu_{re,l}$ и время

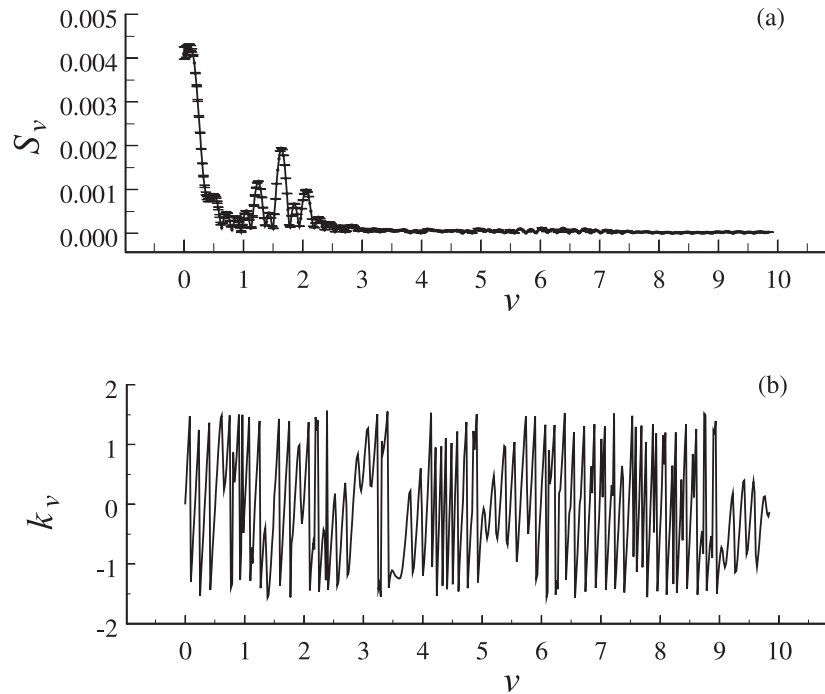


Рис. 3. Спектр (a) S_ν и дисперсионная кривая k_ν (b) колебаний величины U для модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_p = 483$.

$t_l = 1/(2\pi\nu_{\text{im},l})$ нарастания неустойчивости колебаний величины y_j . Функции $k_{\nu,j}^{(0,1,2)}$ использовались для оценки частот ν и их погрешностей.

На Рис. 3а приведен график функции $S_\nu = S_\nu^{(U)} = |\mathcal{F}_{1,2}(\nu)|/\tau_{\text{в.г.}}$, полученный для модели 1 по данным о средних значениях функции $C_{12}^{(U)}$ и погрешностях этих средних значений (для краткости в наименованиях осей ординат на Рис. 3 и в последующих подобных рисунках верхний индекс ((U) или (f)) опущен при обозначении функций S_ν , а также опущен второй нижний индекс j при обозначении дисперсионных кривых, но в подписях к рисункам указывается, колебаниям какой величины (U или f) соответствуют приводимые на рисунках функции S_ν и k_ν). Величины $S_\nu^{(U)}$ на Рис. 3 приведены в (пк/млн лет)². Ряд локальных максимумов функции $S_\nu^{(U)}$, выходящих за пределы погрешностей $S_\nu^{(U)}$ и связанных с локальными экстремумами функции $C_{12}^{(U)}$, можно заметить на зависимости $S_\nu^{(U)}$ от ν .

При $\nu < 2.5$ (область низких частот) величины $S_\nu^{(U)}$ заметно больше, чем при $\nu > 3$. При значениях $\nu \in [5, 7.5]$ величины $S_\nu^{(U)}$ немного возрастают в сравнении со значениями $S_\nu^{(U)}$ при $\nu \in [3, 5]$ или $\nu > 7.5$. Как и в случае колебаний f (см. Рис. 3 из [19]), наибольший вклад в среднюю мощность

колебаний U вносят низкие частоты, соответствующие колебаниям ядра и всего скопления в целом.

На Рис. 3б приведена дисперсионная кривая $k_\nu = k_{\nu,2}$ колебаний величины U для модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_p = 483$, $n_{\text{st}} = 30$, $\epsilon = \epsilon_1$. Согласно этой кривой, на расстояниях $r \leq 1$ пк от центра скопления легко отметить до тридцати неустойчивых колебаний величины U , что составляет 71–75% от числа неустойчивых колебаний величины f в этой модели (см. [19]). Из этих тридцати неустойчивых колебаний лишь десять имеют частоты $\nu < 3$ и, следовательно, наибольшие мощности. Таким образом, в центральных частях модели 1 РЗС количество неустойчивых колебаний U составляет менее 3/4 от числа неустойчивых колебаний f . При этом доля неустойчивых колебаний U с достаточно большими значениями $S_\nu^{(U)}$ составляет приблизительно 24% от общего числа неустойчивых колебаний U .

Зависимости величин S_ν от ν далее для краткости мы будем называть спектрами. Для сравнения спектров S_ν колебаний величин U и f в модели 1 РЗС на Рис. 4 приведены спектр $S_\nu^{(U)}$ (сплошной линией) и спектр $S_\nu^{(f)}$ колебаний величины f , умноженный на постоянную величину $\beta = 1/80$ пк¹⁴/(млн лет)⁸ для удобства сравнения спектров (зависимость $\beta S_\nu^{(f)}$ от ν приведена на Рис. 4 пунктирной линией). Спектры, приведенные

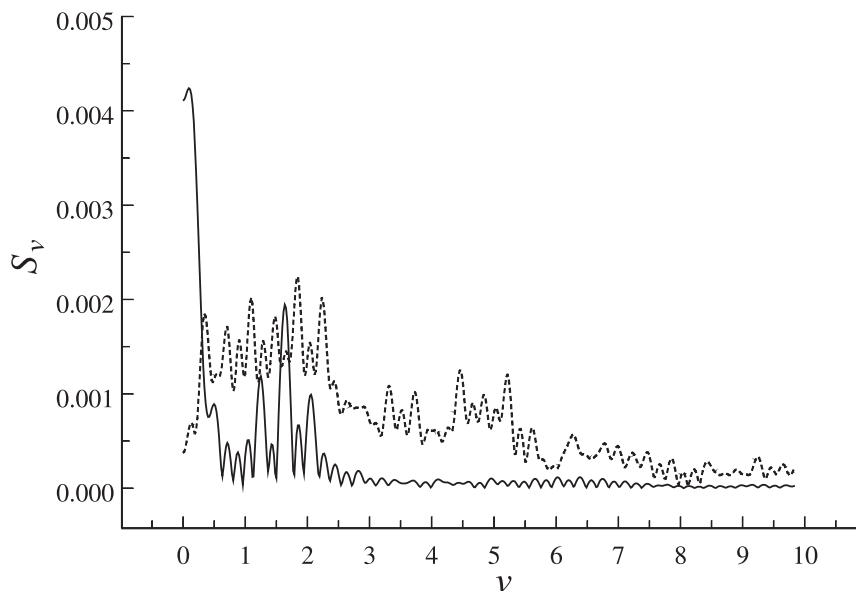


Рис. 4. Спектры S_ν колебаний величин U и f для модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_p = 483$. Спектр $S_\nu^{(U)}$ показан сплошной линией, $\beta S_\nu^{(f)}$ — пунктирной линией ($\beta = \text{const}$, спектр $S_\nu^{(f)}$ получен в [19] при $n_{\text{st}} = 30$).

на Рис. 4, вычислены при $r = 1$ пк, $n_p = 483$; спектр $S_\nu^{(f)}$ вычислен в [19] при $n_{\text{st}} = 30$. Согласно Рис. 4, частоты колебаний величин U и f , соответствующие локальным максимумам значений $S_\nu^{(U)}$ и $S_\nu^{(f)}$, в основном хорошо согласуются между собой при $\nu \lesssim 2.5$ и лишь слабо согласуются или не согласуются при $\nu > 2.5$. Кроме того, при $\nu > 2.5$ относительный вклад колебаний U в среднюю по всему спектру $S_\nu^{(U)}$ мощность колебаний U заметно меньше, чем в случае колебаний величины f . По-видимому, низкочастотные колебания f тесно связаны с колебаниями U , а при $\nu > 2.5$ вклад колебаний U в формирование колебаний f может быть мал или равен нулю. В этом случае высокочастотные колебания f могут быть в большей степени результатом развития неустойчивостей лишь в пространстве скоростей, а не координат (например, развитие слабой турбулентности в движениях звезд модели 1 РЗС [30]).

Оценку “наклона” спектра колебаний величины y_i к оси ν удобно проводить с помощью разностного отношения $q = (S_{\nu,b} - S_{\nu,a}) / (\nu_b - \nu_a)$, где $\nu_a = 1.5$ и $\nu_b = 7.5$ — средние значения ν в интервалах $\nu \in [1, 2] \equiv \mathcal{N}_a$ и $\nu \in [7, 8] \equiv \mathcal{N}_b$ соответственно, а $S_{\nu,a}$ и $S_{\nu,b}$ — средние значения S_ν в интервалах \mathcal{N}_a и \mathcal{N}_b соответственно. Колебания с частотами из интервала \mathcal{N}_a в большей степени характеризуют колебания ядра скопления и имеют большую мощность; высокочастотные колебания с $\nu \in \mathcal{N}_b$ и $\nu > 8$ имеют небольшую мощность, которая мало меняется с увеличением ν в спектрах

колебаний величин U и f (см. Рис. 4). Параметр q достаточно хорошо описывает средние “наклоны” спектров колебаний величин y_i .

Вычисления параметра q в данной работе проводились для ряда значений ϵ из интервала $\epsilon/\epsilon_1 \in [0.8, 2.2]$. При расчете спектров и величин q использовались ФКЗ одиннадцатого порядка точности и значения $r = 1, 3, 5$ пк, $n_p = 483$. На Рис. 5а приведена зависимость q от ϵ для колебаний величины f в модели 1 скопления при $r = 1$ пк, $n_{\text{st}} = 30$. Вертикальными барами на Рис. 5а показаны погрешности величин q , обусловленные погрешностями спектров $S_\nu^{(f)}$. Согласно Рис. 5а, для большинства значений ϵ величины q близки к нулю, что соответствует малым наклонам спектров колебаний f . Однако на графике зависимости q от ϵ видны несколько локальных минимумов, из которых наиболее глубоким является минимум q при $\epsilon = \epsilon_1$. Такие локальные минимумы обусловлены изменениями вида спектров $S_\nu^{(f)}$ в интервале частот $\nu \in \mathcal{N}_a$ при малых изменениях ϵ вблизи точек локальных минимумов зависимости q от ϵ . В большей степени при этом меняются величины $S_\nu^{(f)}$ в точках локальных максимумов (частоты локальных максимумов спектров $S_\nu^{(f)}$ изменяются не столь значительно при малых изменениях ϵ). Кроме того, имеется ряд значений ϵ , при которых форма спектров, частоты и величины $S_\nu^{(f)}$ локальных максимумов, иногда наклон спектров хорошо согласуются с

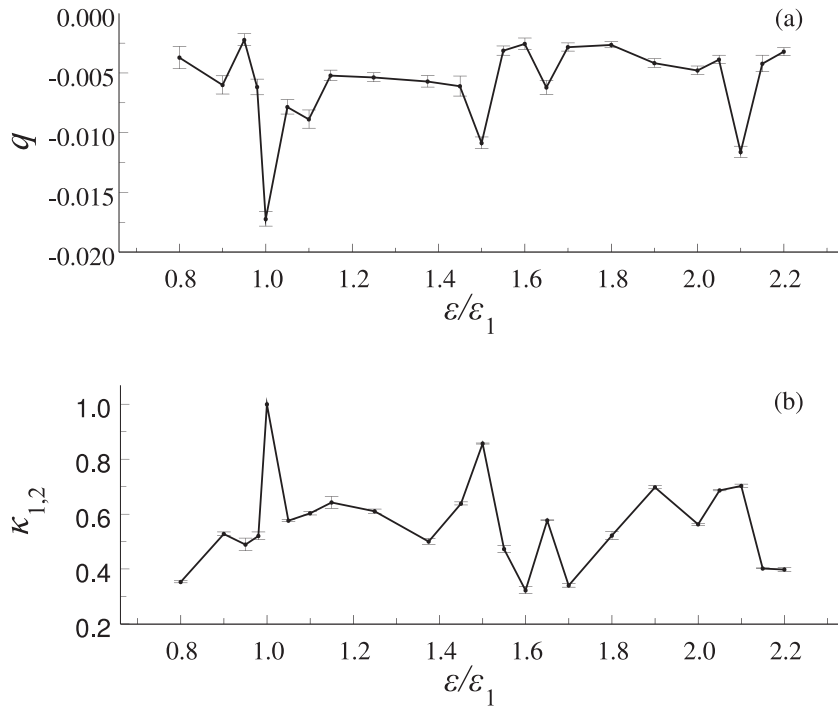


Рис. 5. Зависимости от ϵ величин q (а) и $\kappa_{1,2}$ (б) для колебаний величины f в модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_p = 483$, $n_{st} = 30$.

этим характеристиками спектра $S_\nu^{(f)}$ при $\epsilon = \epsilon_1$. По-видимому, имеет место “повторяемость” или сближение (согласование) формы спектров при некоторых фиксированных значениях ϵ , например, при $\epsilon/\epsilon_1 = 1.0, 1.5, 2.0$ (в этой последовательности спектров при увеличении ϵ наклон q убывает) или $\epsilon/\epsilon_1 = 1.15, 1.25, 1.55, 1.7, 1.8, 2.2$ — в этом случае величина q меняется значительно меньше, чем при $\epsilon/\epsilon_1 = 1.0, 1.5, 2.0$. На Рис. 5б приведена зависимость от ϵ коэффициента корреляции $\kappa_{1,2}$ между спектром $S_\nu^{(f)}$, полученным при $\epsilon = \epsilon_1$, и спектром $S_\nu^{(f)}$, полученным при произвольном значении ϵ . Легко видеть, что точки более глубоких локальных минимумов на зависимости $q = q(\epsilon)$ совпадают или хорошо согласуются с точками соответствующих локальных максимумов на зависимости $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$. Наличие локальных максимумов на зависимости $\kappa_{1,2} = \kappa_{1,2}(\epsilon)$ также указывает на “повторяемость” спектров $S_\nu^{(f)}$ при некоторых фиксированных значениях ϵ . Уменьшение значений $\kappa_{1,2}(\epsilon)$ при $\epsilon/\epsilon_1 < 1$ и $\epsilon/\epsilon_1 \rightarrow 0.8$ связано с нарастанием различий между спектрами $S_\nu^{(f)}$, полученными с помощью ФКЗ одиннадцатого и десятого порядков точности при $\epsilon/\epsilon_1 < 1$ (см. ниже).

Отметим, что общее число неустойчивых колебаний величины f в модели 1 РЗС в сред-

нем убывает с увеличением ϵ . Например, при $r = 1$ пк число пар n_c колебаний f с комплексно-сопряженными частотами изменяется от 41–42 при $\epsilon = \epsilon_1$ до $n_c = 12$ при $\epsilon = 2.2\epsilon_1$, что указывает на уменьшение степени неустойчивости колебаний величины f при увеличении ϵ . Однако вблизи значений $\epsilon/\epsilon_1 = 1.0, 1.05, 1.25, 1.5, 2.0$ величина n_c в среднем близка к 40 и составляет $n_c = 41-42, 42, 40-41, 40, 38-39$ соответственно. Вблизи значений $\epsilon/\epsilon_1 = 1.15, 1.55, 1.7, 1.8$ величина n_c в среднем близка к 30 и изменяется в интервале $n_c \in [24, 34]$. Общее число пар неустойчивых колебаний величины f при $r = 1$ пк в модели 1 РЗС достаточно велико ($n_c = 34-42$) для значений ϵ , близких к ϵ_1 .

На Рис. 6а приведены зависимости $q = q(\epsilon)$, полученные по спектрам $S_\nu^{(f)}$ модели 1 РЗС при $r = 3$ пк (сплошная линия) и $r = 5$ пк (пунктирная линия). Зависимости $q = q(\epsilon)$ на Рис. 6а имеют в основном такой же вид, как и на Рис. 5а. Согласно Рис. 6а, с увеличением r значения q приближаются к нулю, а наклон спектров $S_\nu^{(f)}$ уменьшается.

На Рис. 6б приведены зависимости $\xi = |S_{\nu,1}^{(10)} - S_{\nu,1}^{(11)}| / (S_{\nu,1}^{(10)} + S_{\nu,1}^{(11)}) = \xi(\epsilon)$, полученные по спектрам $S_\nu^{(f)}$ модели 1 РЗС при $r = 1$ пк (штрих-пунктирная линия), $r = 3$ пк (сплошная линия) и $r = 5$ пк (пунктирная линия). Величины

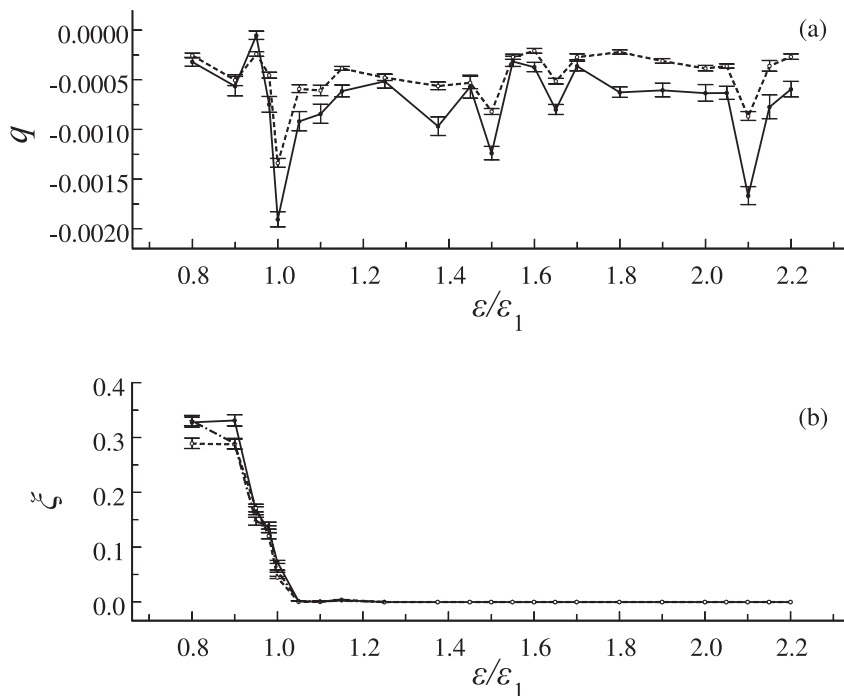


Рис. 6. Зависимости от ϵ величин q (а) и ξ (б) для колебаний величины f в модели 1 РЗС при $n_p = 483$, $n_{st} = 30$; кривые при $r = 3$ пк показаны сплошной линией, при $r = 5$ пк — пунктирной линией, кривая при $r = 1$ пк на Рис. (б) показана штрих-пунктирной линией.

$S_{\nu,1}^{(10)}$ и $S_{\nu,1}^{(11)}$ получены с использованием ФКЗ десятого и одиннадцатого порядков точности соответственно. Легко видеть, что использование величин $\epsilon < \epsilon_1$ при вычислении спектров $S_{\nu}^{(f)}$ неприемлемо, т. к. приводит к значительным изменениям в спектрах, обусловленным погрешностями вычисления ФКЗ.

Отметим, что наименьшие значения q (и большие наклоны) в спектрах модели 1 РЗС с разными значениями ϵ реализуются, когда все бегущие волны колебаний f в интервале частот $\nu \in \mathcal{N}_a$ имеют одинаковый знак волнового числа $k_{\nu,j}$ и, следовательно, движутся в одну сторону по r (в этом случае суммарная мощность колебаний в интервале частот $\nu \in \mathcal{N}_a$ и наклон спектра оказываются наибольшими) (см. Рис. 7а и 7с). Если в этом интервале частот наблюдаются две или несколько бегущих навстречу волн сравнимой суммарной мощности, то общая мощность всех колебаний с частотами $\nu \in \mathcal{N}_a$ оказывается малой, и реализуются близкие к нулю значения q и малые наклоны спектра (см. Рис. 7б и 7д). Такой же результат легко получить в отношении средней амплитуды колебаний на достаточно большом интервале времени для суммы двух синусоидальных волн с близкими длинами волн и частотами, но заметно разными амплитудами и разными направлениями движения по r . При встречном движении двух синусоидальных волн

средняя по времени амплитуда суммарной волны оказывается наименьшей; в случае движения этих волн в одном направлении средняя амплитуда возрастает.

Величины q для спектров $S_{\nu}^{(U)}$ также обусловлены наличием или отсутствием встречных бегущих волн колебаний потенциала U в интервале частот $\nu \in \mathcal{N}_a$. Зависимости $q = q(\epsilon)$ для спектров $S_{\nu}^{(U)}$ и $S_{\nu}^{(f)}$ имеют сходный характер (Рис. 5а и 6а) и поэтому здесь не приводятся.

По-видимому, в моделях РЗС с близкими значениями ϵ могут формироваться не всякие бегущие и стоячие волны, а лишь удовлетворяющие определенным соотношениям между длиной волны и размером системы в направлении распространения волны. Стоячая волна легко может быть представлена в виде суммы двух встречных волн с равными амплитудами и частотами, бегущих в радиальном направлении [23], что ставит в соответствие длину этих волн и размер системы в радиальном направлении. Если длины волн в модели 1 РЗС подчиняются условиям квантования, то это относится и к фазам $rk_{\nu,j}$ колебаний с такими длинами волн. Поскольку $rk_{\nu,j} \in [-\pi/2, \pi/2]$, то даже малые изменения фаз вблизи значений $rk_{\nu,j} = 0, \pm\pi/2$ могут менять направление движения волн и вид дисперсионных кривых при малых изменениях ϵ . На

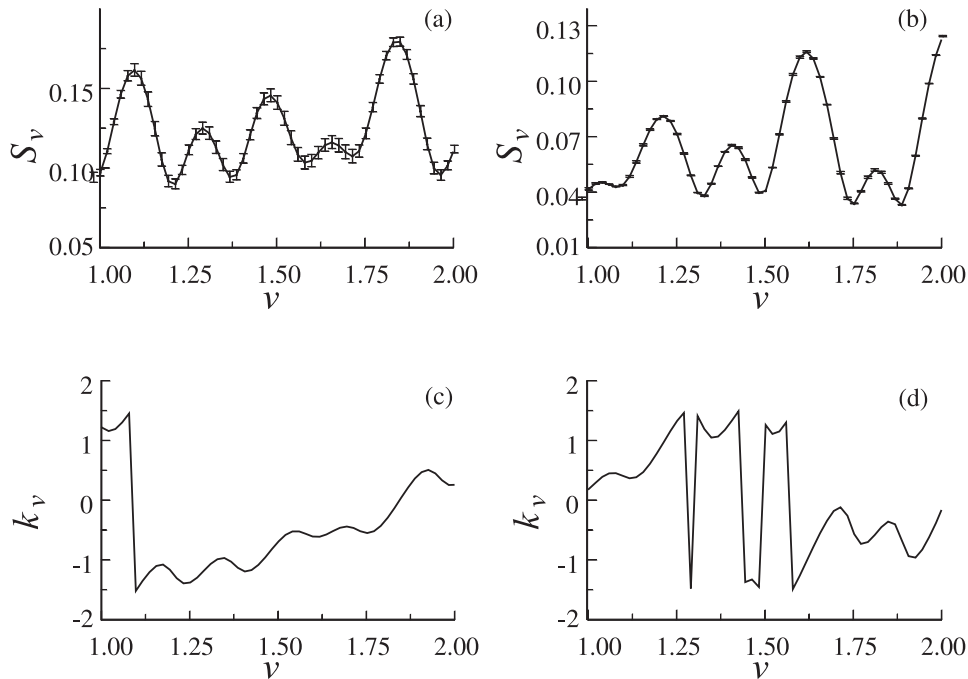


Рис. 7. Спектры и дисперсионные кривые колебаний величин f для модели 1 РЗС при $r = 1$ пк, $n_{st} = 30$, $n_p = 483$, $\nu \in \mathcal{N}_a$. (a), (c) получены при $\epsilon = \epsilon_1$; (b), (d) получены при $\epsilon = 1.05\epsilon_1$.

наш взгляд, квантовый характер формирующихся в моделях РЗС волн фазовой плотности и потенциала вполне может быть причиной того, что спектры колебаний величин f и U в моделях с разными ϵ могут быть заметно разными уже при мало различающихся ϵ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) В работе выполнен корреляционный и спектральный анализ колебаний фазовой плотности и потенциала в модели 1 РЗС из [17] для разных расстояний r от центра скопления при разных значениях параметра сглаживания ϵ силовых функций в уравнениях движения звезд скопления.

2) В случае $\epsilon = \epsilon_1 = 0.012\bar{r}_{ij}$ (\bar{r}_{ij} — среднее по разным парам звезд в скоплении начальное расстояние между звездами), отмечено прохождение волн колебаний f с частотой внешнего воздействия (прилива) ν_G от периферии к центру скопления. При этом параметры такой волны меняются, происходит распад волны на несколько составляющих с частотами, соизмеримыми с ν_G ; в модели РЗС колебания с частотой ν_G являются устойчивыми при $r \in [3, 9]$ пк и, вероятно, при $r > 9$ пк. Неустойчивость, а затем и распад таких колебаний на соизмеримые по частоте неустойчивые колебания, имеют место при $r < 3$ пк.

3) В случае $\epsilon = \epsilon_1$ на расстояниях $r \simeq 3$ пк от центра скопления (вблизи границы ядра скопления)

в модели 1 РЗС волны колебаний f на некоторых частотах (например, $\nu = 0.34, 1.81$) движутся либо к центру скопления (при $r < 3$ пк), либо от центра скопления (при $r > 3$ пк), что возможно при наличии отражений волн от границы ядра или при излучении волн от границы ядра в противоположных по r направлениях (согласно [25], радиальные колебания ядра определяют степень нестационарности модели скопления).

4) Показано, что при увеличении ϵ до $2\epsilon_1$ степень нестационарности модели РЗС скопления [17] практически не изменяется, в ядре модели заметно убывают суммарная кинетическая энергия звезд $K_{i,\epsilon}$ (в 1.2–1.8 раза), число звезд $N_{i,\epsilon}$ (в 1.1–1.4 раза), концентрация звезд $\rho_{i,\epsilon}$ (в 1.14–1.35 раза) и средний квадрат скорости движения звезд $T_{i,\epsilon}$ (в 1.07–1.13 раза), средние радиусы групп звезд $R_{i,\epsilon}$ и величины $\sigma(K_{i,\epsilon})/\bar{K}_{i,\epsilon}$ меняются лишь в пределах погрешностей.

5) Впервые вычислены взаимная корреляционная функция $C_{12}^{(U)}$, спектр частот $S_\nu^{(U)}$ и дисперсионная кривая для колебаний величины потенциала U в модели скопления. Показано, что функция $C_{12}^{(U)}(\tau, r)$ заметно более симметрична относительно $\tau = 0$, чем $C_{12}^{(f)}(\tau, r)$. Спектр $S_\nu^{(U)}$ заметно более простой по сравнению с $S_\nu^{(f)}$ (основные по мощности колебания величины U расположены в

области низких частот $\nu < 2.5$); в ядре модели 1 скопления обнаружены до тридцати неустойчивых колебаний величины U , что составляет 71–75% от числа неустойчивых колебаний величины f . Низкочастотные колебания U и f в ядре модели скопления часто имеют локальные максимумы на близких частотах и, вероятно, тесно связаны между собой. Вклад колебаний U в формирование колебаний f при $\nu > 3$ может быть мал или равен нулю.

6) Вычислены “наклон” q спектра и его зависимость от ϵ , а также коэффициенты корреляции между спектрами колебаний f в модели скопления с разными ϵ . Основной причиной резких изменений q при малых изменениях ϵ является смена встречных бегущих волн колебаний f и U в интервале частот $\nu \in [1, 2]$ волнами с частотами из этого же интервала, бегущими в одном направлении по r , что говорит о неустойчивости формы дисперсионной кривой к малым изменениям ϵ . Обнаружена “повторяемость” спектров (значительная коррелированность спектров при некоторых фиксированных значениях ϵ). Отмеченные здесь и в п. 3 заключения особенности в спектрах и дисперсионных кривых колебаний f , на наш взгляд, связаны с существованием определенных соотношений между размерами скопления и длинами стоячих и бегущих волн в скоплении, обусловлены дискретностью длин волн и фаз колебаний в волнах, формирующихся в скоплении с конечными размерами в направлении распространения волн.

7) Детальное исследование радиальных профилей плотности и скоростей движения звезд ряда РЗС из списка [28] способно дать необходимые данные о длинах волн плотности и фазовой плотности в этих скоплениях, а также позволит оценить соотношения между длинами этих волн и размерами скоплений и ядер скоплений. Сравнение этих оценок с результатами численного моделирования динамики РЗС позволит сделать выводы о возможности квантования волн плотности и фазовой плотности в наблюдаемых звездных скоплениях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы” (государственный контракт No. 14.518.11.7064).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2nd ed. (Princeton Univ. Press, Princeton, 2008).
2. H. E. Kandrup and S. Jr. Haywood, *Astrophys. J.* **374**, 255 (1991).
3. H. E. Kandrup and S. Jr. Haywood, *Astrophys. J.* **386**, 635 (1992).
4. H. E. Kandrup, S. Jr. Haywood, and D. E. Willmes, *Astrophys. J.* **399**, 627 (1992).
5. A. A. El-Zant, *Astronom. and Astrophys.* **331**, 782 (1998).
6. J. Goodman, D. C. Heggie, and P. Hut, *Astrophys. J.* **415**, 715 (1993).
7. V. M. Danilov, *Astronomy Reports* **41**, 163 (1997).
8. W. Dehnen, *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.* **324**, 273 (2001).
9. R. H. Miller, *Astrophys. J.* **140**, 250 (1964).
10. M. Hemsendorf and D. Merritt, *Astrophys. J.* **580**, 606 (2002).
11. D. Merritt, *Astronom. J.* **111**, 2462 (1996).
12. E. Athanassoula, E. Fady, J. C. Lambert, and A. Bosma, *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.* **314**, 475 (2000).
13. L. Hernquist and N. Katz, *Astrophys. J. Suppl.* **70**, 419 (1989).
14. S. A. Rodionov and N. Ya. Sotnikova, *Astronomy Reports* **49**, 470 (2005).
15. D. J. Price and J. J. Monaghan, *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.* **374**, 1347 (2007).
16. L. Hernquist and J. E. Barnes, *Astrophys. J.* **349**, 562 (1990).
17. V. M. Danilov and L. V. Dorogavtseva, *Astronomy Reports* **52**, 467 (2008).
18. V. M. Danilov, *Astronomy Reports* **54**, 514 (2010).
19. V. M. Danilov and S. I. Putkov, *Astrophysical Bulletin* **68**, 154 (2013).
20. В. М. Данилов, С. И. Путков, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки*, No. 2, 65 (2013).
21. Я. Ф. Волков, В. Г. Дятлов, Р. И. Митина, *Диагностика турбулентной плазмы* (Наукова думка, Киев, 1983).
22. М. Бернар, Ж. Бриффо, Ж. Бюссак и др., в *Диагностика плазмы* (Атомиздат, Москва, 1973), Ред. С. Ю. Лукьянов, Вып. 3, с. 449.
23. Ф. Крауфорд, *Берклевский курс физики*, Т. 3: *Волны* (Наука, Москва, 1976).
24. V. M. Danilov, *Astronomy Reports* **52**, 888 (2008).
25. V. M. Danilov and S. I. Putkov, *Astronomy Reports* **56**, 609 (2012).
26. S. A. Kutuzov and L. P. Osipkov, *Sov. Astron.* **24**, 17 (1980).
27. V. M. Danilov and L. V. Dorogavtseva, *Astronomy Reports* **47**, 483 (2003).
28. V. M. Danilov and A. F. Seleznev, *Astron. Astrophys. Trans.* **6**, 85 (1994).
29. V. M. Danilov, *Astronomy Letters* **23**, 322 (1997).
30. V. M. Danilov and S. I. Putkov, *Astronomy Reports* **56**, 623 (2012).
31. Дж. Бендат, А. Пирсол, *Применения корреляционного и спектрального анализа* (Мир, Москва, 1983).
32. Д. Грей, *Наблюдение и анализ звездных фотосфер* (Мир, Москва, 1980).

Smoothing of Force Functions and the Fluctuation Spectra of an Open Star Cluster Model

V. M. Danilov, S. I. Putkov

We perform the correlation and spectral analysis of phase-space density and potential fluctuations in a model of an open star cluster for various values of the smoothing parameter ϵ of the force functions in the equations of motion of cluster stars, and compute the mutual correlation functions for the fluctuations of potential U and phase-space density f of the cluster model at different clustercentric distances. We use the Fourier transform of the mutual correlation functions to compute the power spectra and dispersion curves of the potential and phase-space density fluctuations. The spectrum of potential fluctuations proves to be less complex than that of phase-space density fluctuations. The most powerful potential fluctuations are associated with phase-space density fluctuations, and their spectrum lies in the domain of low frequencies $\nu < 3/\tau_{v,r}$; at intermediate and high frequencies ($\nu > 3/\tau_{v,r}$), the contribution of potential fluctuations to those of the phase-space density is small or equal to zero (here $\tau_{v,r}$ is the violent relaxation time scale of the cluster). We find a number of unstable potential fluctuations in the core of the cluster model (up to 30 pairs of fluctuations with different complex conjugate frequencies). We also find and analyze the dependences of the spectra and dispersion curves of phase-space density and potential fluctuations on ϵ . We find a “repeatability” (significant correlation) of the spectra at some values of parameter ϵ . The form of the dispersion curve is unstable against small variations of ϵ . We discuss the astrophysical applications of our results: the break-up in the cluster core of the phase-space density wave running from the cluster periphery toward its center into several waves with frequencies commensurable to that of the external (tidal) influence; emission and reflection of phase-space and potential waves near the cluster core boundary; possible wavelength and phase discretization of the phase-space and potential waves in the cluster model.

Keywords: *stars: kinematics and dynamics—open clusters and associations: general*