

УДК 524.72-323.3/17

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЛАКТИК

© 2009 Н. Ю. Ловягин\*

Санкт-Петербургский Государственный университет, Санкт-Петербург,  
Университетский пр. 28, 198504 Россия

Поступила в редакцию 29 января 2009 г.; принята в печать 13 марта 2009 г.

Проводится анализ методов определения фрактальной размерности и масштабов неоднородности на модельных каталогах галактик и применение этих методов к данным каталогов 2dF и 6dF. Показано, что при исследовании фрактальных структур корреляционные методы корректно применять только начиная с масштабов равных нескольким средним расстояниям между галактиками и вплоть до масштабов соответствующих (10 – 20)% от радиуса наибольшего шара, целиком лежащего в пределах выборки. Ранее считалось возможным применение корреляционных методов вплоть до целого радиуса максимального шара и это ограничение не учитывалось при поиске масштаба соответствующего выходу на однородность. При применении эмпирической формулы для аппроксимации радиальных распределений в выборке, ограниченной по предельной видимой звездной величине, отклонение истинного радиального распределения от аппроксимирующей формулы (а не параметры наилучшей аппроксимации) коррелируют с фрактальной размерностью. При исследовании каталога 2dF фрактальная размерность оценивается в  $2.20 \pm 0.25$  на масштабе от 2 до 20 Мпк, на больших масштабах методом условной плотности сделать надежный вывод о величине размерности не удается из-за систематических внутренних ошибок метода. При исследовании радиальных распределений галактик в каталогах 2dF и 6dF обнаружены значительные неоднородности на масштабах до 70 Мпк, величина и размер которых согласуются с оценкой фрактальной размерности в  $D = 2.1 - 2.4$ .

Ключевые слова: галактики, группы и скопления галактик, межгалактический газ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пространственное распределение галактик отражает в себе как начальные условия в ранней Вселенной, так и ход эволюции первичных возмущений плотности. Анализ различных выборок галактик с помощью двухточечной корреляционной функции показал наличие ее степенного характера  $\xi(r) = (r_0/r)^\gamma$  на масштабах от 0.01 до 10 Мпк (здесь и далее постоянная Хаббла принимается равной  $H_0 = 100$  км/с/Мпк) с наклоном  $\gamma = 1.77$  и параметром  $r_0 = 5$  Мпк [1]. Долгое время считалось, что масштаб  $r_0$  является характерным размером неоднородности, а, начиная с масштабов  $3r_0 = 15$  Мпк, распределение галактик становится однородным. Однако обнаружение в недавних обзорах структур, имеющих масштабы в десятки и сотни Мпк [2], ставит под сомнение это утверждение.

В связи с этим в настоящее время актуальным является вопрос о границах применимости и надежности корреляционных методов исследования

пространственного распределения галактик и поиск новых методов описания больших и сверхбольших структур.

В настоящее время большое значение имеют два типа данных о красных смещениях галактик:

- первый — каталоги спектральных красных смещений, получаемые в больших областях (телесных углах) на небесной сфере, но на малых красных смещениях (до  $z \lesssim 0.5$ ) (2dF, 6dF, SDSS и др.). В таких каталогах возможно применение корреляционных методов вычисления фрактальной размерности;
- второй — каталоги фотометрических красных смещений, которые можно определить для объектов глубоких полей. Они выполняются в малых телесных углах (порядка  $1^\circ \times 1^\circ$ ), но на существенно больших красных смещениях  $z > 1$  (до 6) (COSMOS, HDF, HUDF, FDF и др.) В этих каталогах затруднено применение корреляционных методов, так как в маленьком телесном угле в такой выборке радиус наибольшего шара,

\*E-mail: lovyagin@mail.com

целиком лежащего внутри телесного угла, слишком мал.

Однако в обоих типах каталогов возможно исследование радиального распределения галактик, которое строится в выборке, ограниченной предельной видимой звездной величиной. Этот метод не только снимает ограничение на размер наибольшего шара, что существенно увеличивает допустимый масштаб исследования, но и выполняется для всех галактик каталога, а не только в полной по объему выборке, что позволяет увеличить число исследуемых объектов. Анализ флуктуаций в радиальном распределении галактик позволяет оценить как размеры, так и амплитуды максимально больших структур в данной выборке галактик.

В настоящей работе рассмотрены два метода статистического анализа структур — определение фрактальной размерности и исследования радиальных распределений. Несмотря на то, что работа ограничена анализом каталогов 2dF и 6dF, модельные каталоги строились с учетом существования двух типов каталогов (с большим и малым телесными углами выборки на небесной сфере).

При выполнении данной работы использовалось разработанное автором программное обеспечение, предназначенное для генерации искусственных трехмерных каталогов галактик, а также для статистического анализа как естественных, так и искусственных выборок. Оно разработано как библиотека функций для языка C++ (пока нет пользовательского интерфейса). В настоящее время подготавливается ее описание, которое, вместе с исходным кодом, планируется разместить на сайте автора. Программное обеспечение охватывает несколько более широкий, чем описанный здесь, спектр задач и является началом для создания пакета для проведения разностороннего статистического анализа пространственного распределения галактик.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТРУКТУР

### 2.1. Оценка фрактальной размерности

Фрактальная размерность, оценивается методом условной плотности в шарах (полной корреляционной функции в шарах). Определения полной и редуцированной корреляционных функций, а также подробное описание их свойств дано в работе [2]. Основанием для выбора метода шаров послужила работа [3], где показано, что этот метод, с одной стороны, является достаточно быстрым (по сравнению с методом цилиндров), с другой стороны, достаточно точным (в отличие от условной плотности в оболочках, нет сильных флуктуаций) и, кроме того, может быть применен к фрактальным

структурам (в отличие от редуцированной двухточечной корреляционной функции, которая строится в предположении об однородности распределения внутри выборки).

Идея метода состоит в построении зависимости количества точек  $N(r)$  в шаре радиуса  $r$ , усредненного по шарам с центрами во всех точках множества. Так как рассматривается только участок множества, то усреднение приходится проводить только по тем шарам, которые целиком лежат внутри множества. Вычисление размерности производится по графику условной концентрации<sup>1</sup>  $n(r) = N(r)/(4/3\pi r^3)$  в логарифмических координатах, где наклон прямой должен соответствовать фрактальной размерности  $D$  за вычетом 3, так как следует ожидать, что  $n(r) \propto r^{D-3}$ .

### 2.2. Анализ радиальных распределений

Радиальное распределение — это зависимость  $N(z)$ , такая, что

$$dN(z, dz) = N(z)dz, \quad (1)$$

где  $dN$  — количество галактик, имеющих красное смещение от  $z$  до  $z + dz$ . При построении такого распределения производится подсчет количества галактик  $\Delta N(z, \Delta z)$  в сферической оболочке толщины  $\Delta z$ , середина которой находится на расстоянии, соответствующем красному смещению  $z$ , то есть формула (1) переходит в

$$\Delta N(z, \Delta z) = N(z)\Delta z.$$

Таким образом, распределение  $N(z)$  может быть выстроено в бинах с некоторым выбираемым шагом по  $\Delta z$ . Традиционно на графики радиального распределения наносится именно величина  $\Delta N(z, \Delta z)$  — количество галактик в оболочках.

Для каталогов, ограниченных по предельной звездной величине, используется аппроксимация радиального распределения  $N(z)$  эмпирической формулой (см., например, [4, 5]):

$$N(z) = Az^\gamma \exp\left(-\left(\frac{z}{z_c}\right)^\alpha\right). \quad (2)$$

Здесь три параметра  $\gamma$ ,  $z_c$  и  $\alpha$  — независимы, а  $A$  — нормировочный множитель (интеграл радиального распределения нормируется на общее число галактик выборки):

$$\int_0^\infty N(z) dz = \int_0^\infty Az^\gamma \exp\left(-\left(\frac{z}{z_c}\right)^\alpha\right) dz =$$

<sup>1</sup>Слова “плотность” и “концентрация” употребляются как синонимы в том смысле, что концентрация есть плотность точек-галактик с единичной массой.

$$= \frac{Az_c^{\gamma+1} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\alpha} = N, \quad (3)$$

где  $N$  — общее число галактик, а  $\Gamma(x)$  — (полная) гамма-функция Эйлера. Однако при поиске параметров наилучшей аппроксимации радиального распределения множитель  $A$  невозможно взять строго вычисленным из формулы (3), в силу флуктуаций приходится искать его на участке от  $A - \sqrt{A}$  до  $A + \sqrt{A}$ .

Аппроксимация проводится по методу наименьших квадратов, то есть ищутся такие значения параметров, при которых сумма квадратов невязок минимальна. Так как аппроксимирующая функция нелинейна по параметрам, невозможно применять классический матричный метод наименьших квадратов. Однако и “честная” минимизация методом наискорейшего (градиентного) спуска оказывается крайне неэффективной (минимум нечеткий и время работы ЭВМ может составить от нескольких суток до нескольких месяцев). Поэтому применяется метод поиска минимума на сетке, с уменьшением сетки и сужением диапазона поиска на каждом последующем шаге итерации.

После нахождения параметров наилучшей аппроксимации производится выделение участков неоднородности на графике относительных флуктуаций:

$$\sigma_N = \frac{N_{obs} - N_{theor}}{N_{theor}}, \quad (4)$$

где

$$N_{obs} = N(z_i, \Delta z),$$

$$N_{theor} = Az^\gamma \exp\left(-\left(\frac{z}{z_c}\right)^\alpha\right)\Big|_{z=z_i}.$$

Таким образом, структурой можно считать всякое превышение флуктуации уровня Пуассоновского шума  $\sigma_N > 3\sigma_p$ , где  $\sigma_p = 1/\sqrt{N_{theor}}$ , так как при фрактальном распределении характерная величина флуктуации увеличивается на  $\sigma_\xi$ , которая вычисляется из значения двухточечной корреляционной функции  $\xi(r)$ :

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{V^2} \int_V dV_1 \int_V dV_2 \xi(|r_1 - r_2|),$$

где  $V$  — объем множества [6–8].

<sup>2</sup>Взято именно  $N_{theor}$ , так как  $N_{obs}$  может быть равно нулю.

### 3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ КАТАЛОГИ

#### 3.1. Каталог 2dF

Каталог 2dF [9], точнее его часть 2dFGRS, где собрана информация о красных смещениях галактик, содержит 245591 объектов, из них примерно 220 тысяч имеют достаточно точно измеренные красные смещения. Ограничение по звездной величине, исправленной за галактическое поглощение, в фильтре  $J$  составляет  $14.0 < m_j < 19.45$ . Большинство галактик имеют красное смещение  $z < 0.3$ . Каталог доступен на сайте <http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg>.

На небесной сфере галактики каталога сосредоточены в двух непрерывных, вытянутых по прямому восхождению, полосах и случайно распределенных малых участках. Около 140 тысяч галактик расположены в южной полосе, и 70 тысяч — в северной.

#### 3.2. Каталог 6dF

Каталог 6dFGS — спектроскопический обзор всего неба с галактической широтой  $|b| > 10^\circ$  [10–12]. Наблюдения начались в 2003 году и выполнялись при помощи мультиканального спектрографа (на момент написания данной работы они еще не были завершены). Каталог доступен на сайте <http://www-wfau.roe.ac.uk/6dFGS>. В работе была использована вторая версия (second data release) каталога, содержащая 83014 галактик с известными экваториальными координатами. 71627 объектов имеют достаточно надежно определенные красные смещения. На небесной сфере можно выделить три завершенных участка обзора. Для исследования использовалась выборка галактик с известной звездной величиной в фильтре  $R$ .

### 4. МОДЕЛЬНЫЕ КАТАЛОГИ ГАЛАКТИК

Для проверки надежности, точности и локализации границ применимости методов их следует протестировать на модельных каталогах. В настоящей работе для этой цели используются искусственные каталоги таких типов, которые учитывают не только пространственное распределение галактик (однородное и фрактальное), но и распределение галактик по абсолютной звездной величине (функция светимости галактик). В таких каталогах возможно как применение корреляционного анализа (определения фрактальной размерности) в полной по объему выборке в большом телесном угле, так и изучение радиального распределения в выборке с ограничением по видимой звездной величине как в большом, так и в малом телесном угле.

Кроме того, случайные величины (положения в пространстве и абсолютная звездная величина галактик) генерировались при помощи современного

датчика псевдослучайных чисел MersenneTwister, у которого, в отличие от стандартно применяемой линейной конгруэнтности, уровень корреляции существенно ниже, и он считается пригодным для применения метода Монте-Карло [13].

В работе рассмотрена фрактальная модель реального распределения галактик, в которой параметрами являются фрактальная размерность и параметры функции светимости. Эта модель описывает степенной характер наблюдаемых корреляций и радиальные распределения галактик в реальных каталогах.

#### 4.1. Пространственное распределение галактик

Использовано три модели пространственного распределения галактик.

**Равномерное распределение.** Координаты каждой точки множества генерируются как три случайных числа, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$  (следовательно, все множество содержится в кубе  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ).

**Пыль Кантора** (точнее, обобщение на трехмерный случай). В качестве нулевого поколения данного множества берется тот же куб  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Каждое ребро куба делится на  $m$  равных частей, то есть сам куб делится на  $m^3$  равных кубиков, и для каждого кубика определяется, “выживет” он или нет в следующем поколении с вероятностью “выживания”  $p$ . Множество “выживших” кубиков считается следующим поколением, и для каждого кубика алгоритм перезапускается. Самым множеством является предел при стремлении номера поколения к бесконечности: в каждом поколении ребро кубика уменьшается в  $m$  раз и стремится к 0 как  $\frac{1}{m^n}$ , то есть сам кубик стягивается в точку. В случае с реальным распределением следует обрывать процесс на некотором поколении с номером  $n$ . Внутри каждого из “выживших” в последнем поколении кубиков выбирается точка, координаты которой — случайные числа, равномерно распределенные по проекциям ребер кубика на координатные оси.

Известно, что теоретическая размерность такого множества вычисляется по формуле

$$D = \log_m(pm^3).$$

В нашем случае по заданной размерности  $D$  вычисляется вероятность  $p = m^{D-3}$ .

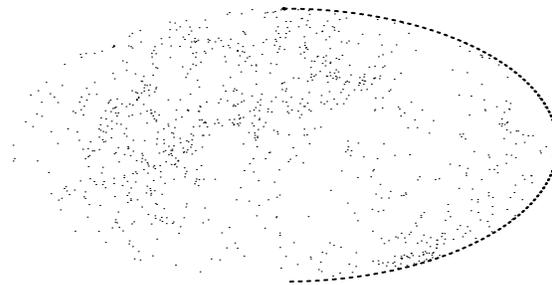


Рис. 1. Проекция Хаммера-Айтоффа обобщенного Гауссова блуждания с  $w = 10^{-4}$ . Выборка — сфера с меньшим радиусом (см. 5.2).

**Гауссово блуждание** и его обобщение с возможностью генерации множеств размерности  $2 \leq D \leq 3$ . За первую точку берется начало координат  $(0, 0, 0)$ . В классическом случае каждая последующая точка получается из предыдущей путем прибавления к каждой ее координате случайного числа, распределенного по нормальному закону с дисперсией 1 и математическим ожиданием 0.

Обобщение, предлагаемое здесь впервые, заключается в следующем: вместо одной новой точки из предыдущей с некоторой вероятностью  $w$  получаются две. Более точное описание алгоритма использует термин “поколение”. За нулевое поколение принимается начало координат  $(0, 0, 0)$ . Следующее поколение получается из предыдущего по правилу: из каждой точки предыдущего поколения генерируется одна или две точки нового, каждая путем прибавления к координатам предыдущей случайных чисел, распределенных по нормальному закону, как и в классическом случае, причем вероятность появления двух точек  $w$ , а одной точки  $1 - w$ . Далее алгоритм перезапускается для каждой точки нового поколения. Случай  $w = 0$  соответствует классическому Гауссову блужданию. На Рис. 1 изображена проекция на небесную сферу рассмотренного множества с  $w = 10^{-4}$ .

#### 4.2. Распределение галактик по абсолютной звездной величине

Распределение галактик искусственных каталогов по абсолютной звездной величине строится таким образом, чтобы удовлетворять функции светимости галактик — функции Шехтера. Вид функции Шехтера  $S(M)$  взят из работ [14, 15]:

$$S(M) = 0.92\phi_0 \exp(-0.92(\alpha + 1)(M - M^*))$$

$$- \exp(-0.92(M - M^*)).$$

Плотностью вероятности  $f_M$  абсолютной звездной величины, как случайной, является ее перенормировка

$$f_M dM = \frac{S(M) dM}{\int_{M_{min}}^{M_{max}} S(M) dM}. \quad (5)$$

Параметры функции светимости взяты из исследований каталога 2dF [16] ( $M^* = -19.67$ ,  $\phi_0 = 0.0164$ ,  $\alpha = -1.21$ ), так как искусственные каталоги разрабатывались именно как модель каталога 2dF.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

### 5.1. Искусственные каталоги галактик

Были сделаны генерации равномерного распределения точек для Канторова множества с размерностью 2.0 и 2.6, а также для Гауссова блуждания с  $w = 10^{-4}$  (оценка фрактальной размерности для данного множества  $2.4 \pm 0.3$ ), в каждом случае количество точек превосходило  $7.5 \times 10^7$ . После этого требуется нахождение центра шара, содержащего для всех генераций одинаковое количество точек  $2 \times 10^7$  (эти ограничения определяются ресурсами ЭВМ). Данный шар является моделью наблюдаемой части Вселенной, а его центр — точка наблюдения.

Поиск центра — необходимая процедура, так как важно убедиться, что в выделенном участке множество сгенерировано полностью, то есть нет пустот, вызванных конечностью генерации, а не фрактальной структурой, что может исказить результат исследования модели. Для обеспечения этого центр находится как место наибольшей концентрации, точнее — за центр берется такая точка множества, радиус шара вокруг которой, содержащий требуемое количество точек, минимален по всем точкам генерации. Однако процедура поиска такой точки требует слишком много времени, поэтому от перебора всех точек приходится отказываться, разбивая множество на кубики, и заменять подсчет количества точек в шаре, подсчетом количества кубиков с весом, равным количеству точек в этом кубике.

Каждой галактике, попавшей в выделенный шар, присваивается абсолютная звездная величина, распределенная по перенормированному закону Шехтера (5). Задание параметра  $\phi_0$  (см. 4.2) позволяет установить однозначную связь между количеством точек-галактик ( $N_0$ ) в искусственном

сферически симметричном множестве и радиусом ограничивающей его сферы  $R_0$  [15]:

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi\phi_0\Gamma(1+\alpha,\beta)}{N_0},$$

где  $\Gamma$  — неполная гамма-функция:

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$

Таким образом, появляется возможность сравнивать реальные и искусственные каталоги.

### 5.2. Подвыборки из искусственных каталогов

Для каждого сферически симметричного искусственного каталога было сделано пять подвыборок:

- выборка, ограниченная сферой, с тем же центром, но меньшим радиусом, содержащая ровно  $10^5$  точек (это примерно то количество, при котором можно за разумное при построении сетки моделей время вычислить фрактальную размерность);
- выборка в малом телесном угле, примерно  $10^5$  точек, также для вычисления фрактальной размерности ( $\Omega \sim 0.05\pi$ );
- выборка по предельной видимой звездной величине с  $m_{lim} = 17^m.0$  — для построения радиальных распределений. В этой подвыборке построены три полных по объему выборки: до  $z = 0.013$  и  $M \sim -16^m.3$ , до  $z = 0.1$  и  $M \sim -20^m.3$ , до  $z = 0.13$  и  $M \sim -20^m.9$  — для вычисления фрактальной размерности;
- выборка по предельной видимой звездной величине в большом телесном угле — с  $\Omega \sim 0.3\pi$  — для построения радиальных распределений. В этой подвыборке построены три полных по объему выборки: до  $z = 0.04$  и  $M \sim -18^m.4$ , до  $z = 0.06$  и  $M \sim -19^m.3$ , до  $z = 0.08$  и  $M \sim -19^m.9$  — для вычисления фрактальной размерности. Выборку можно рассматривать как модель каталогов 2dF, 6dF и др., подобных им;
- выборка по предельной видимой звездной величине в малом телесном угле — только для построения радиальных распределений. Выборку можно рассматривать как модель каталогов COSMOS, HDF и других, подобных им.

### 5.3. Выводы по исследованию модельных каталогов

#### 5.3.1. Выводы об эффективности метода условной плотности в шарах по определению размерности

Для определения размерности  $D$  функция условной плотности  $n(r)$  исследуется в логарифмических координатах, где она из степенной должна превратиться в линейную

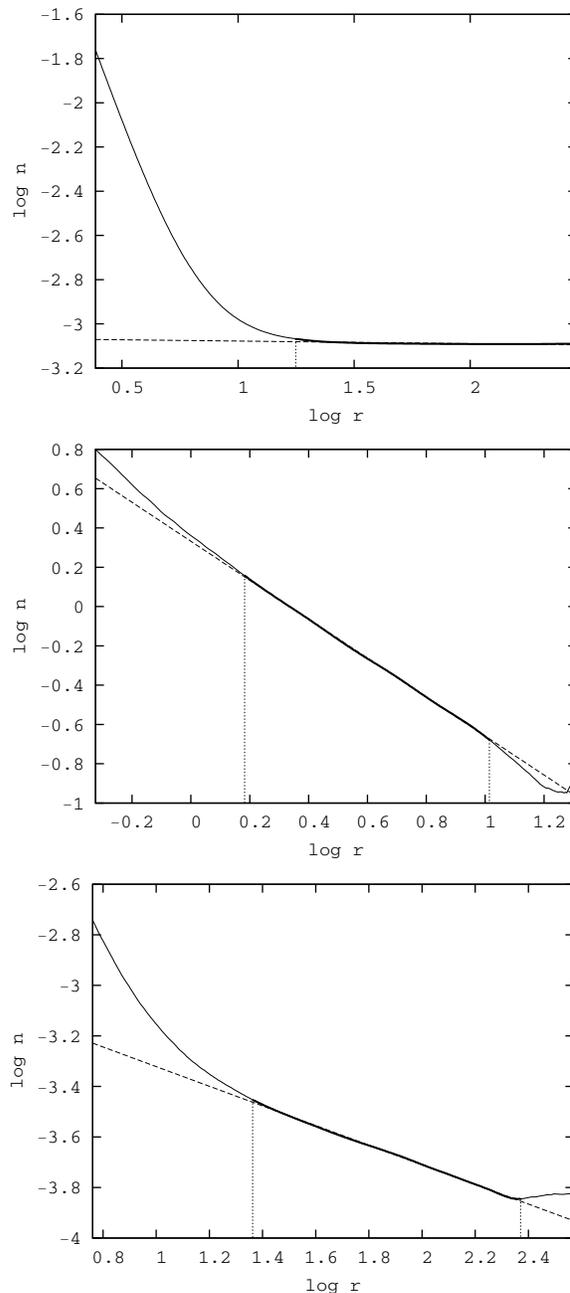
$$\log n = A + (D - 3) \log r.$$

Однако, как показывает практика, она не является таковой на всем интервале от  $r_0$  (минимальное расстояние между точками) до  $r_m$  (радиус наибольшего шара, целиком лежащего во множестве). Для каждого множества (каталога) на графике условной концентрации выделяются три характерных участка (слева направо):

- на первом (от  $r_0$  до  $r_1$ ) происходит убывание  $n(r)$ , соответствующее размерности 0 — отвечающие им радиусы сравнимы с расстоянием между точками множества;
- на втором (от  $r_1$  до  $r_2$ ) участке  $n(r)$  “выходит на рабочий режим”, где наклон (как ожидается) соответствует размерности;
- на третьем (от  $r_2$  до  $r_m$ ) функция ведет себя непредсказуемо, так как здесь усреднение происходит по слишком малому количеству шаров, и говорить о возможности определения размерности по данному участку нельзя.

Таким образом, стоит задача выделить второй промежуток, то есть найти такие  $r_1$  и  $r_2$ , между которыми функция имеет прямолинейный участок. На нем параметры  $A$  и  $D$  могут быть легко найдены методом наименьших квадратов. Примеры графиков условной концентрации для различных случаев приведены на Рис. 2:

- на основе анализа множеств с заранее известной Хаусдорфовой размерностью (Канторово множество) — сравнения известной размерности с результатом вычислений — можно сделать вывод о том, что метод эффективен для определения размерностей множеств:
  - со сферически-симметричной конфигурацией;
  - в ограниченном телесном угле;
  - в полных по объему выборках галактик со сферической конфигурацией;



**Рис. 2.** Примеры графиков условной концентрации. Сверху вниз: Пуассоновское множество (вычисленная по данному графику фрактальная размерность 2.99), Канторово множество с размерностью 2.6 (вычисленная размерность 2.61), Канторово множество с размерностью 2.0 (вычисленная — 1.99). На графиках условной концентрации сплошной линией показаны вычисленные значения, пунктирной — аппроксимирующая прямая, по которой вычислена размерность, утолщенной — участок графика условной концентрации, по которому произведена аппроксимация. Абсцисса левого конца этого участка равна  $\log r_1$ , правого —  $\log r_2$ , самой правой точки графика —  $\log r_m$  (об этих величинах речь идет в тексте).

- в полных по объему выборках, ограниченных по телесному углу.

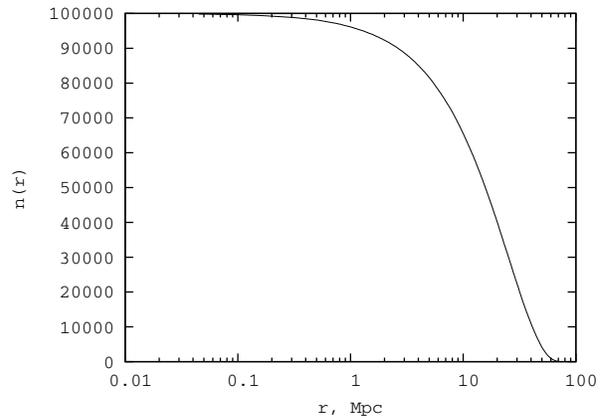
Метод может применяться для определения размерности множества галактик Вселенной по полным по объему выборкам в ограниченных по наблюдаемой части небесной сферы обзорам красных смещений галактик (типичная ситуация). Точность определения размерности (для множеств с одинаковой фрактальной размерностью во всех его частях) составляет  $\pm(0.1-0.2)$ ;

- в случае однородного распределения определение размерности возможно на масштабах (верхняя граница — радиус  $r_2$ ) до 100% от радиуса  $r_m$  наибольшего шара, целиком лежащего во множестве.

При уменьшении размерности оказывается, что радиус  $r_2$  уменьшается, то есть верхняя граница масштабов, на которых можно определить фрактальную размерность этим методом, ухудшается, оставляя к размерности 2.0 лишь (5–20)% от радиуса наибольшего шара, целиком лежащего во множестве. Четкой корреляции, однако, не наблюдается, так как вмешиваются и другие факторы (например, индивидуальные особенности фрактального множества, лакунарность);

- для сферической конфигурации радиус наибольшего шара равен радиусу глубины обзора, несферическая геометрия выборки сильно ограничивает размер наибольшего шара, что сильно уменьшает радиус  $r_2$  (до 0.01% от глубины обзора при телесном угле в  $0.01\pi$ ). Полные по объему выборки еще в несколько раз ограничивают глубину обзора;
- на графике условной концентрации множеств размерности, меньшей 3.00, при  $r > r_2$  функция ведет себя непредсказуемо, в том числе может показать и мнимый выход на однородность (см., например, Рис. 2, внизу). Таким образом, по правому концу графика условной концентрации сделать надежный вывод о масштабах выхода на однородность нельзя, так как даже чисто фрактальные распределения могут показывать эффекты мнимой однородности.

Таким образом, при исследовании таких каталогов, как 2dF, 6dF, SDSS, ограниченных по  $z \lesssim 0.5$  (соответствует примерно 1300 Мпк) с несферической конфигурацией и необходимостью выделения полных по объему выборок, можно с уверенностью



**Рис. 3.** Зависимость количества шаров, целиком лежащих во множестве, от радиуса шара — то количество шаров, по которым производится усреднение значения условной концентрации (количества точек в этих шарах) при выбранном значении радиуса шара — для Пуассоновского множества.

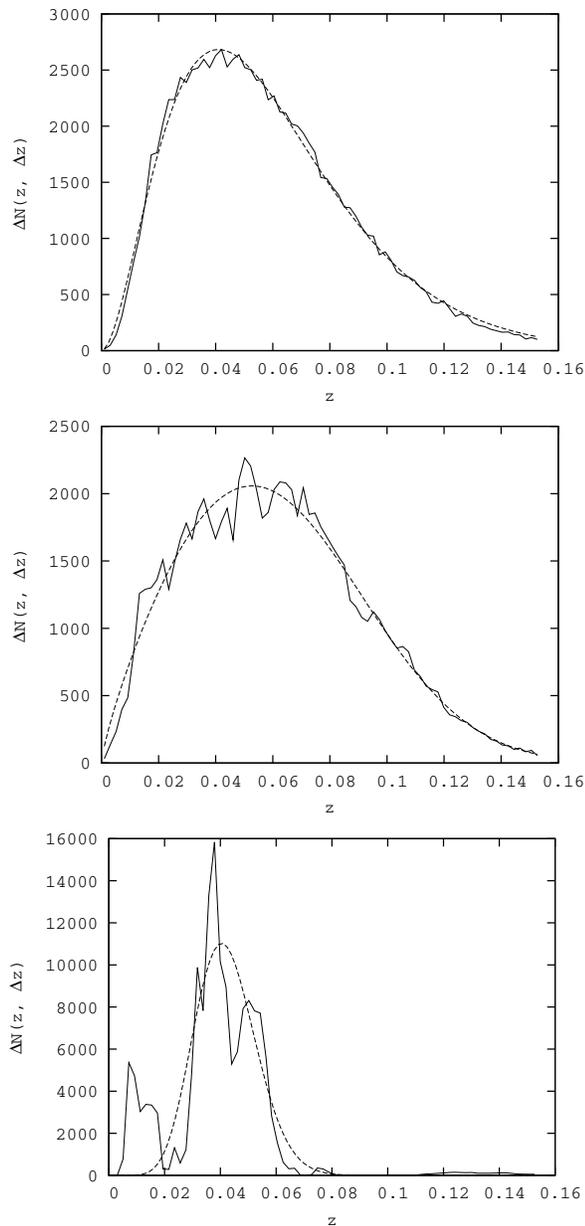
делать вывод о наличии неоднородности только на масштабах в 30–100 раз меньших — 10–40 Мпк.

Такое поведение условной концентрации при  $r > r_2$  объясняется тем, что на этом участке усреднение числа точек в шаре радиуса  $r$  происходит по слишком малому количеству шаров: шаров с центрами в точках множества, целиком лежащих внутри множества, тем меньше, чем больше радиус шара. Крайняя правая точка на графике условной концентрации вычисляется лишь по одному шару (см. Рис. 3). Реальная статистика (для фрактального распределения) накапливается там, где количество шаров составляет 20–90% от общего числа точек.

### 5.3.2. Выводы об эффективности исследования радиальных распределений

Можно сделать следующие выводы об эффективности исследования радиальных распределений:

- по параметрам аппроксимации эмпирической формулой (2) (см. Рис. 4):
  - эмпирическая формула одинаково хорошо описывает модельное распределение как в однородном, так и во фрактальном случае, при размерности, большей 2.0. При меньшей размерности флуктуации сильно увеличиваются, появляется большое число “пустых” бинов и аппроксимация становится невозможной;



**Рис. 4.** Пример радиального распределения для (сверху вниз) Пуассоновского множества, Канторова множества с размерностью 2.6, Канторова множества с размерностью 2.0.  $\Delta z = z_m/75$  (количество бинов равно 75). Сплошной линией показано измеренное значение, пунктирной — аппроксимация эмпирической формулой.

- параметры наилучшей аппроксимации<sup>3</sup> достаточно устойчивы при изменении шага по  $z$ , за исключением случая

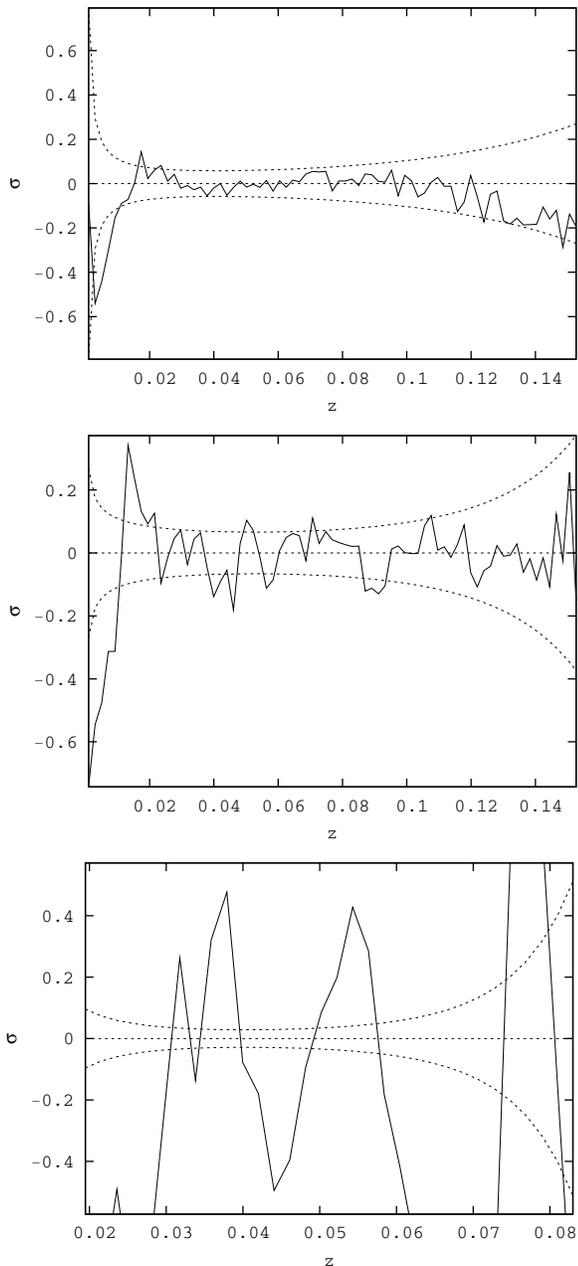
<sup>3</sup>Для истинной плотности вероятности красного смещения галактики как случайной величины, то есть для сравнения берется не величина  $A$  из формулы (3), а  $A/N/\Delta z$ , где  $N$  — общее число галактик выборки, а  $\Delta z$  — выбранный шаг.

больших (в нашем случае менее 1/25 от глубины обзора) шагов;

- эти параметры неустойчивы относительно количества точек (этот вывод можно сделать исходя из того, что при исследовании Пуассоновского множества параметры в сферической конфигурации и в различных телесных углах сильно различаются). Параметры неустойчивы относительно выборок по телесным углам;
- параметры не показывают явной корреляции с фрактальной размерностью. Ожидалось, что  $\gamma = D - 1$ , но это явно не так. Более того, оказывается, что при совершенно разных комбинациях независимых параметров функция может иметь схожий вид и давать примерно одинаковую сумму квадратов невязок. Это может свидетельствовать о избыточности количества параметров для данной задачи и ставит под сомнение безоговорочное применение данной эмпирической формулы для аппроксимации радиальных распределений. Однако при нахождении хорошей, в смысле малости значения суммы квадратов невязок, комбинации параметров возможно исследование относительных флуктуаций аппроксимации от наблюдаемого значения: несмотря на то, что малое значение суммы квадратов невязок может быть достигнуто при различных комбинациях параметров, графики относительных флуктуаций для них почти тождественны. Таким образом, аппроксимация данной формулой позволяет определить масштаб и величину флуктуаций, что дает возможность адекватного выделения структур, методом, описанном в 2.2.

- по относительным флуктуациям:

- амплитуда флуктуаций (4) тем выше, чем меньше фрактальная размерность. Она увеличивается от  $3-4\sigma_p$  на однородном распределении, до  $30-40\sigma_p$  на Канторовом множестве размерности 2.0 (см. Рис. 5). Гауссово блуждание дает немного меньшую амплитуду;
- даже в случае однородного распределения точек, обнаруживаются флуктуации выше уровня  $3\sigma_p$  на левом конце графика радиального распределения, повторяющиеся на всех подвыборках



**Рис. 5.** Пример графика относительных флуктуаций для (сверху вниз) Пуассоновского множества, Канторова множества с размерностью 2.6, Канторова множества с размерностью 2.0.  $\Delta z = z_m/75$  (число бинов равно 75). Сплошной линией показана измеренная флуктуация, пунктирными — уровни  $\sigma = 0$  и  $\pm 3\sigma_p$ . Флуктуации, превышающие этот уровень, должны свидетельствовать об обнаружении структуры. На графике для однородного распределения видны две, вероятно, ложные, большие флуктуации, вызванные возможной неточностью эмпирической формулы. Они же повторяются на графике для размерности 2.6, но к ним добавляются собственные флуктуации, превышающие уровень Пуассоновского шума, вызванные фрактальностью. В случае размерности 2.0 величина этих собственных флуктуаций становится очень большой.

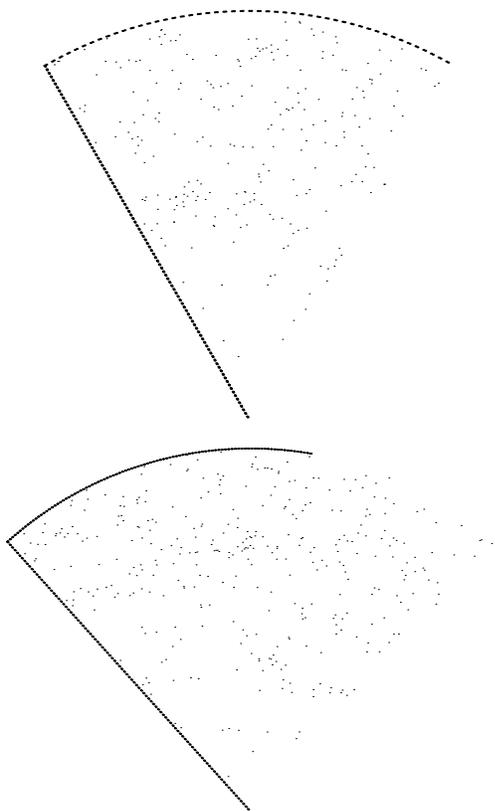
из соответствующего множества. Вероятно, это связано с тем, что эмпирическая формула недостаточно хорошо аппроксимирует левый конец радиального распределения (слишком рано начинается влияние экспоненциального множителя). Поэтому для множеств всех размерностей, первые две флуктуации, превышающие уровень Пуассоновского шума, нельзя считать истинными признаками структуры;

- количество находимых неоднородностей, их размер и амплитуда, выраженная в долях  $\sigma_p$ , растут с уменьшением фрактальной размерности и уменьшаются с уменьшением телесного угла;
  - по радиальным распределениям можно сделать вывод о наличии или отсутствии неоднородностей на практически всей глубине обзора на  $z$  от 10% до 60% от глубины обзора  $z_m$  и, сравнивая с модельными распределениями, оценить фрактальную размерность.
- следует использовать не слишком малый и не слишком большой шаг по  $z$ , так как именно при таком шаге параметры аппроксимации примерно одинаковы, а количество случайных флуктуаций, вызванных “пустыми бинами” или одиночными точками, не слишком велико. Оптимальным количеством бинов в нашем случае оказалось  $N = 40-80$ , но в каждом конкретном случае оно должно подбираться индивидуально. Слишком большой шаг обнаруживается при нахождении параметров наилучшей аппроксимации радиального распределения: появляется зависимость вычисленных значений параметров от величины шага, а флуктуации заметно изменяют форму. Слишком малый шаг можно выявить по появлению бинов без единой галактики и шума на флуктуациях.

## 6. ОБРАБОТКА РЕАЛЬНЫХ КАТАЛОГОВ

### 6.1. Вычисление размерности

Для вычисления размерности необходимо найти не только полную по объему выборку, но и выделить на небесной сфере участок, где каталог полностью завершен. В каталоге 2dF таких участка два, в каждом из которых около 70 000 точек. В каталоге 6dF их три, в каждом из них менее 20 000 точек. Так как выделение полной по объему выборки оставит лишь примерно треть галактик, то в участках каталога 6dF останется существенно



**Рис. 6.** Конусные диаграммы (в полярных координатах  $(z, \alpha)$ ) полных по объему выборок до  $z_{lim} = 0.15$  северной (сверху) и южной (снизу) областей каталога 2dF.

менее 10000 точек, чего для вычисления фрактальной размерности явно недостаточно. Поэтому размерность вычислена только по галактикам каталога 2dF.

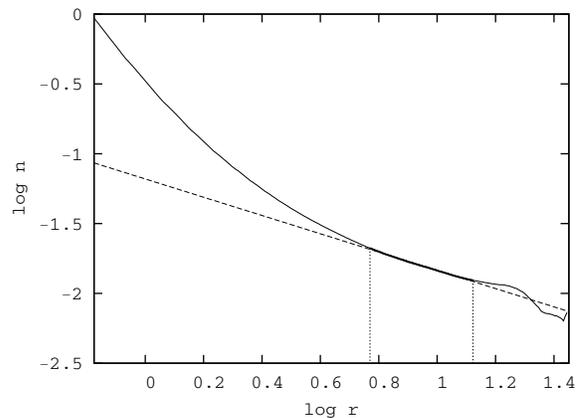
На небесной сфере были выбраны две области, почти полностью заполненные наблюдениями:

Диапазон $\alpha$	Диапазон $\delta$	$\Omega$	Количество
$150^\circ \dots 210^\circ$	$-4^\circ \dots 2^\circ$	$0.034\pi$	61259
$328^\circ \dots 52^\circ$	$-32^\circ \dots -24^\circ$	$0.057\pi$	82044

В каждой области были построены три полных по объему выборки — до  $z = 0.075$ , до  $z = 0.15$  и до  $z = 0.2$ . На Рис. 6 приведены конусные диаграммы для полных по объему выборок.

### 6.2. Исследование радиальных распределений

Для анализа радиальных распределений необязательно рассматривать только полностью заполненные участки на небесной сфере. Поэтому для обоих каталогов (2dF и 6dF) были построены три



**Рис. 7.** График условной концентрации для каталога 2dF. Полная по объему выборка в первой области до  $z = 0.075$ .

радиальных распределения — для всего множества и для двух областей, хорошо заполненных наблюдениями. Для 6dF эти области определяются параметрами:

Диапазон $\alpha$	Диапазон $\delta$	$\Omega$	Количество
$290^\circ \dots 100^\circ$	$-42^\circ \dots -23^\circ$	$0.263\pi$	16288
$150^\circ \dots 240^\circ$	$-42^\circ \dots -23^\circ$	$0.139\pi$	14407

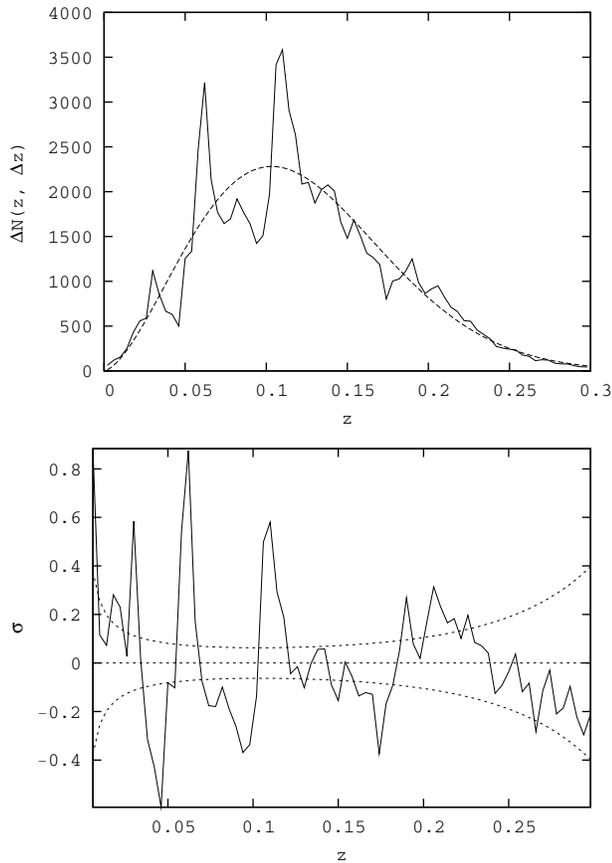
Для 2dF взяты те же области, что и при определении размерности.

## 6.3. Выводы

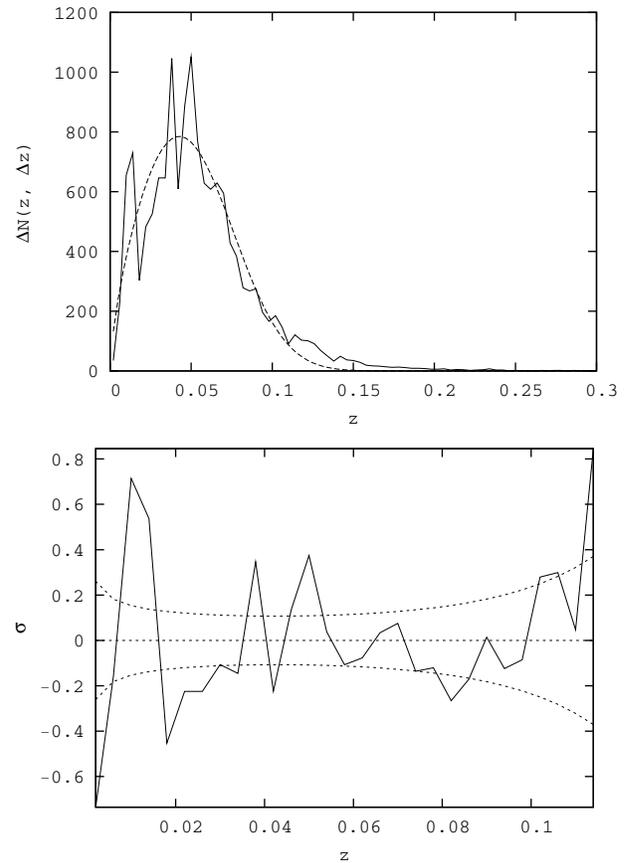
### 6.3.1. Результаты вычисления размерности

По результатам вычисления можно сделать вывод о том, что фрактальная размерность множества галактик в полных по объему выборках каталога 2dF составляет  $2.20 \pm 0.25$ . Масштабы неоднородности — от 2 Мпк до 20 Мпк (см. Рис. 7). Ошибка определения размерности больше, чем на модельных каталогах, что свидетельствует о не идеальной фрактальности пространственного распределения галактик, возможна мультифрактальность.

По каталогу 6dF были сделаны попытки найти фрактальную размерность в областях, хорошо заполненных наблюдениями. Однако результат оказался, вероятно, сильно заниженным (1.5 и 1.9). Этот эффект связан с недостаточно полным и равномерным заполнением наблюдениями участка небесной сферы и неодинаковой проникающей способностью по  $z$  для разных участков наблюдений. Оба эти эффекта создают мнимые пустоты в участке, где определяется размерность, что приводит к занижению ее оценки.



**Рис. 8.** Радиальное распределение (вверху) и график относительных флуктуаций (внизу) для каталога 2dF. Первая область  $\Delta z = z_m/75$ .



**Рис. 9.** Радиальное распределение (вверху) и график относительных флуктуаций (внизу) для каталога 6dF. Первая область  $\Delta z = z_m/75$ .

### 6.3.2. Результат исследования радиальных распределений

Основной вывод, который можно сделать по радиальным распределениям — найдены неоднородности с амплитудами, существенно превышающими не только уровень  $3\sigma_p$ , но и  $7\sigma_p$ , в количестве, существенно бóльшем, чем можно ожидать для однородного распределения. Это свидетельствует о явно неоднородном распределении галактик вплоть до расстояния 300–500 и 700 Мпк. Неоднородности на правом конце радиального распределения для каталога 6dF свидетельствуют лишь о неодинаковой проникающей способности по  $z$  для разных участков наблюдения и недостаточном количестве галактик на больших  $z$ . Характерные размеры (масштабы) неоднородностей составляют 40–70 Мпк (см. Рис. 8, 9).

Амплитуда неоднородности составляет порядка 6, что соответствует фрактальной размерности бóльшей 2.0, но меньшей 2.6, то есть оценка размерности  $D = 2.2$ , полученная корреляционным методом, адекватно отражает характер неоднородностей на радиальном распределении.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как результат исследования модельных каталогов пространственного распределения галактик и распределения галактик по абсолютной звездной величине отметим, что:

- корреляционные методы корректно применять только на масштабе от нескольких средних расстояний между галактиками до (10–20)% от радиуса наибольшего шара, целиком лежащего внутри множества. Ранее считалось возможным применение вплоть до целого радиуса и это 10%-е ограничение, от которого свободно только однородное распределение, не учитывалось при поиске масштабов выхода на однородность (см., например, [17, 18]);
- эмпирическая формула (2), часто применяемая для аппроксимации радиальных распределений объектов в каталогах, ограниченных по предельной видимой звездной величине, дает одинаково адекватное среднеквадратичное приближение как для однородных,

так и для фрактальных распределений с размерностью, превышающей 2.0. При более низкой размерности разброс слишком высок и формула неприменима.

Коррелирующим с фрактальной размерностью оказалось отклонение истинного радиального распределения от аппроксимирующей формулы, а не параметры наилучшей аппроксимации.

На основе анализа реальных каталогов галактик получено:

- по данным каталога 2dF фрактальная размерность может быть оценена в  $2.20 \pm 0.25$  в интервале от 2 до 20 Мпк. На больших масштабах методом условной плотности сделать надежный вывод о величине размерности и масштабах неоднородности невозможно из-за систематических внутренних ошибок метода. Требуется обзоры большей глубины и с большим покрытием небесной сферы.

Каталог 6dF пока не может дать надежной оценки фрактальной размерности, так как он незавершен;

- по исследованию радиальных распределений удалось обнаружить значительные неоднородности как в каталоге 2dF, так и в каталоге 6dF. Отклонения от гладкого распределения превышают уровень в  $7\sigma_p$  и достигают масштабов 70 Мпк. Масштаб и величина однородности неплохо коррелирует с оценкой фрактальной размерности в 2.1–2.4.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. В. Барышеву за постановку задачи,

помощь и постоянное внимание к работе и В. П. Решетникову за полезные советы и помощь в подготовке статьи. Работа выполнена при поддержке РФФИ: грант №09-02-00143.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. J. E. Peebles, astro-ph/0103040
2. Ю. В. Барышев, П. Теорикорпи, Бюлл. Спец. астрофиз. обсерв. **59**, 92 (2006).
3. Н. В. Васильев, дипломная работа, СПбГУ, 2004.
4. P. Pirin Erdoğdu, O. Lahav, J. P. Huchra, et al., Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **373**, 45 (2006).
5. R. Massey, J. Rhodes, A. Leauthaud, et al., Astrophys. J. Suppl. **172**, 239 (2007).
6. R. S. Somerville, K. Lee, H. C. Ferguson, et al., Astrophys. J. **600**, 171 (2004).
7. G. S. Buswell, T. Shanks, W. J. Frith, et al., Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **354**, 991 (2004).
8. W. J. Frith, G. S. Buswell, R. Fong, et al., Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **345**, 1049 (2003).
9. M. Colless et al., astro-ph/0306581
10. D. H. Jones, W. Saunders, M. Colless, et al., Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **355**, 747 (2004).
11. D. H. Jones, W. Saunders, M. Read, and M. Colless, PASA **22**, 277 (2005).
12. K. Wakamatsu, M. Colless, T. Jarrett, et al., ASPC **289**, 97 (2003).
13. M. Matsumoto and T. Nishimura, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation **8**, 1 (1998).
14. J. E. Felten, IAUS **117**, 111 (1987).
15. Y. Yoshii and F. Takahara, Astrophys. J. **326**, 1 (1998).
16. P. Norberg, S. Cole, C. M. Baugh, et al., Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **336**, 907 (2002).
17. F. Sylos Labini, M. Montuori, and L. Pietronero, Phys. Rep. **293** 61 (1998).
18. А. В. Тихонов и др., Бюлл. Спец. астрофиз. обсерв. **50**, 39 (2000).

**STATISTICAL PROPERTIES OF THE SPATIAL DISTRIBUTION OF GALAXIES****N.Yu. Lovyagin**

The methods of determining the fractal dimension and irregularity scale in simulated galaxy catalogs and the application of these methods to the data of the 2dF and 6dF catalogs are analyzed. Correlation methods are shown to be correctly applicable to fractal structures only at the scale lengths from several average distances between the galaxies, and up to (10 – 20)% of the radius of the largest sphere that fits completely inside the sample domain. Earlier the correlation methods were believed to be applicable up to the entire radius of the sphere and the researchers did not take the above restriction into account while finding the scale length corresponding to the transition to a uniform distribution. When an empirical formula is applied for approximating the radial distributions in the samples confined by the limiting apparent magnitude, the deviation of the true radial distribution from the approximating formula (but not the parameters of the best approximation) correlate with fractal dimension. An analysis of the 2dF catalog yields a fractal dimension of  $2.20 \pm 0.25$  on scale lengths from 2 to 20 Mpc, whereas no conclusive estimates can be derived by applying the conditional density method for larger scales due to the inherent biases of the method. An analysis of the radial distributions of galaxies in the 2dF and 6dF catalogs revealed significant irregularities on scale lengths of up to 70 Mpc. The magnitudes and sizes of these irregularities are consistent with the fractal dimension estimate of  $D = 2.1-2.4$ .

Key words: *galaxies, galaxy groups and clusters, intergalactic gas*