

Пакет анализа данных GLESP для карт реликтового излучения на полной сфере и его реализация в рамках системы обработки FADPS

О.В. Верходанов¹, А.Г. Дорошкевич², П.Д. Насельский^{3,4}, Д.И. Новиков⁵, В.И. Турчанинов⁶, И.Д. Новиков^{2,4,7}, П.Р. Кристенсен⁴, Л.-И. Чианг⁴

¹ Специальная астрофизическая обсерватория РАН, Нижний Архыз, 369167, Россия

² Астрокосмический центр ФИАН, Профсоюзная 84/32, Москва

³ Ростовский государственный университет, Зорге 5, Ростов-на-Дону, 344090

⁴ Институт им. Нильса Бора, Бледдамсвай 17, ДК-2100 Копенгаген, Дания

⁵ Империял колледж, Лондон, Великобритания

⁶ Институт прикладной математики им. Келдыша РАН, 125047 Москва

⁷ Обсерватория Копенгагенского университета, ДК-2100, Дания

Поступила в редакцию 23.07.2004; принята к печати 10.09.2004.

Разработана новая схема пикселизации GLESP (Gauss–Legendre Sky Pixelization) для построения карт реликтового излучения всего неба. Схема основана на вычислении интегралов в коэффициентах сферических гармоник методом гауссовых квадратур в нулях полиномов Лежандре и позволяет получать строгое ортогональное разложение карты на сферические гармоники. Разработаны соответствующие программы и проведено сравнение с другими методами. Пакет программ GLESP создан в соответствии с базовыми принципами построения гибкой системы обработки данных FADPS. Описываются основные процедуры и структура пакета.

Ключевые слова: космология, космическое микроволновое излучение, наблюдения, анализ данных

GLESP PACKAGE FOR FULL SKY CMB MAPS DATA ANALYSIS AND ITS REALIZATION IN THE FADPS DATA PROCESSING SYSTEM, by O. V. Verkhodanov, A. G. Doroshkevich, P. D. Naselsky, D. I. Novikov, V. I. Turchaninov, I. D. Novikov, P. R. Christensen L.-Y.P.Chiang. A new scheme of sky pixelization GLESP (Gauss–Legendre Sky Pixelization) is developed for CMB maps. The scheme is based on the Gauss–Legendre polynomials zeros and allows one to create strict orthogonal expansion of the map. A corresponding code has been implemented and comparison with other methods has been done. The package has been realized using basic principles of the FADPS data reduction system. Structure and main procedures of the package are described.

Key words: cosmology: cosmic microwave background — cosmology: observations — methods: data analysis

1. Введение

Процесс анализа данных космического микроволнового излучения (СМВ: cosmic microwave background) включает несколько шагов:

- 1) регистрация данных в формате временных рядов,
- 2) пикселизация,
- 3) преобразование карты — сферические гармоники,

- 4) разделение компонент,
- 5) анализ статистики сигнала,
- 6) вычисление спектра $C(\ell)$ — мощности сигнала в зависимости от номера гармоники (мультиполя),
- 7) оценка космологических параметров.

В данной работе мы рассмотрим шаги (2), (3) и (6).

Начиная с космического эксперимента COBE, использующего так называемую квадрилате-

рализованную небесную кубическую проекцию (Quadrilateralized Sky Cube Projection, см. детали у Чана и О'Нила, 1976; О'Нила и Лаубшера, 1976; Грейсена и Калабретты, 1993), проблема пикселизации неба в задачах исследования реликтового излучения (РИ) вызывает большой интерес. Были предложены, как минимум, три метода пикселизации небесной сферы для карт СМВ: пикселизация по граням икосаэдра (Тегмарк, 1996), пикселизация IGLOO (Критенден и Турок, 1998, далее KT98) и HEALPix¹ по методу Горского и др. (1999) (включая последнюю модификацию в 2003). Рассмотрим два важных вопроса, уже упомянутых Тегмарком (1996): а) какой метод является оптимальным для выбора положений центров пикселов, форм и размеров, чтобы получить (наилучшим образом) компактное однородное покрытие неба пикселями с равными площадями, б) какой лучший путь вычисления интегралов свертки карт суммированием пикселов.

Все упомянутые выше схемы пикселизации были посвящены решению первой задачи с наибольшей возможной точностью, а ответ на второй вопрос обычно следовал уже после выбора схемы пикселизации.

В этой работе мы сосредоточим внимание на задачах обработки данных на сфере и затем определим схему пикселизации. Напомним, что пикселизация данных СМВ на сфере является только частью основной проблемы, которая заключается в определении коэффициентов сферических гармоник при разложении сигнала как для анизотропии, так и для поляризации. Эти коэффициенты, которые мы обозначаем a_{lm} , используются в последующих шагах анализа измеряемого сигнала и, в частности, при определении спектра мощности $C(\ell)$ для анизотропии и поляризации (см. обзор Хивона и др., 2002), а в ряде методов — для разделения компонент (Столяров и др., 2002; Насельский и др., 2003а) и анализа статистики фаз (Чианг и др., 2003, Насельский и др., 2003а, б, 2004; Коулс и др., 2004).

Здесь мы предлагаем особый метод вычисления коэффициентов a_{lm} . Он основывается на так называемой квадратуре Гаусса и описывается во втором разделе. Для этой схемы пикселизации положение центров пикселов вдоль полярного угла (координата θ) соответствует так называемым нулям квадратуры Гаусса–Лежандра и, как будет показано ниже, этот метод существенно увеличивает точность вычислений.

Таким образом, метод вычисления коэффици-

ентов a_{lm} диктует выбор метода пикселизации. Мы называем наш метод GLESP (Gauss–Legendre Sky Pixelization: пикселизация неба по Гауссу–Лежандру (Дорошкевич и др., 2003; Верходанов и др., 2003, 2004)). Для реализации подхода GLESP было создано соответствующее программное обеспечение, объединенное в одноименный пакет, который позволяет исследовать данные СМВ, включая определение спектров мощности анизотропии и поляризации, C_ℓ , функционалы Минковского и другие статистики.

Эта работа посвящена описанию основной идеи метода GLESP, оценки точности различных шагов и финальных результатов, описанию пакета GLESP и его тестированию. Мы не обсуждаем в данной работе проблему интегрирования данных из временных рядов внутри пиксела ограниченного размера. Простейшая схема интегрирования по площади пиксела эквивалентна взвешиванию по отношению к центру пиксела. Пакет GLESP может делать это тем же методом, что и HEALPix или IGLOO.

Кроме того, здесь мы описываем основные процедуры пакета и их взаимодействие. Пакет реализован с использованием принципов гибкой системы обработки данных (FADPS: flexible data processing system), действующей на радиотелескопе PATAH-600 (Верходанов и др., 1993; Верходанов, 1997а).

2. Основные идеи и базовые соотношения

Стандартное разложение вариаций температуры на небе $\Delta T(\theta, \phi)$ на сферические гармоники записывается следующим образом:

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1)$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(x) e^{im\phi}, \quad (2)$$

$x = \cos \theta,$

где $P_{\ell}^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Для непрерывной функции $\Delta T(x, \phi)$ коэффициенты разложения $a_{\ell m}$ выражаются как

$$a_{\ell m} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi) d\phi, \quad (3)$$

где $Y_{\ell m}^*$ обозначает комплексное сопряжение $Y_{\ell m}$. Для вычисления интеграла (3) мы будем использовать квадратуру Гаусса — метод, предложенный Гауссом еще в 1814 г. и развитый позднее Кристоффелем в 1877 г. Так как интеграл по x в уравне-

¹ <http://www.eso.org/science/healpix/>

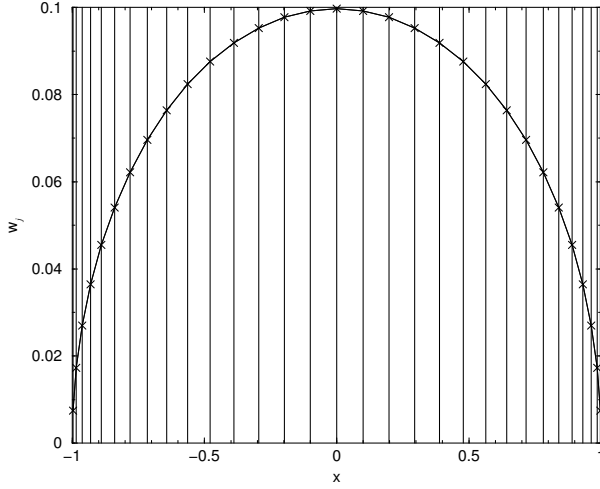


Рис. 1: Взвешивающие коэффициенты Гаусса–Лежандра (w_j) в зависимости от нулей полиномов Лежандра ($x_j = \cos\theta_j$), являющихся центрами колец, используемых в GLESP (для случая $N = 31$). Положения нулей отмечены вертикальными линиями.

нии (3) представляет собой интеграл по полиному x , мы можем использовать следующее равенство (Пресс и др., 1992):

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi) dx = \\ & = \sum_{j=1}^N w_j \Delta T(x_j, \phi) Y_{\ell m}^*(x_j, \phi), \end{aligned} \quad (4)$$

где w_j — собственная взвешивающая функция квадратуры Гаусса. Здесь взвешивающая функция $w_j = w(x_j)$, а также $\Delta T(x_j, \phi) Y_{\ell m}^*(x_j, \phi)$ вычисляются в точках x_j , которые являются сеткой корней полиномов Лежандра:

$$P_N(x_j) = 0, \quad (5)$$

где N — максимальный ранг рассматриваемого полинома. Хорошо известно, что уравнение (5) имеет N нулей в интервале $-1 \leq x \leq 1$. Для метода Гаусса–Лежандра взвешивающие коэффициенты в уравнении (4) равны (Пресс и др., 1992):

$$w_j = \frac{2}{1 - x_j^2} [P'_N(x_j)]^{-2}, \quad (6)$$

где знак ' обозначает производную. Они могут быть вычислены вместе с набором x_j с помощью процедуры “gauleg” (Пресс и др., 1992, пар. 4.5).

Трапецидальные пикселы в GLESP ограничены линиями по координатам θ и ϕ , а их центры (по направлению θ) расположены в точках с $x_j = \cos\theta_j$. Таким образом, интервал $-1 \leq x \leq 1$ покрывается кольцами пикселов (число колец N ,

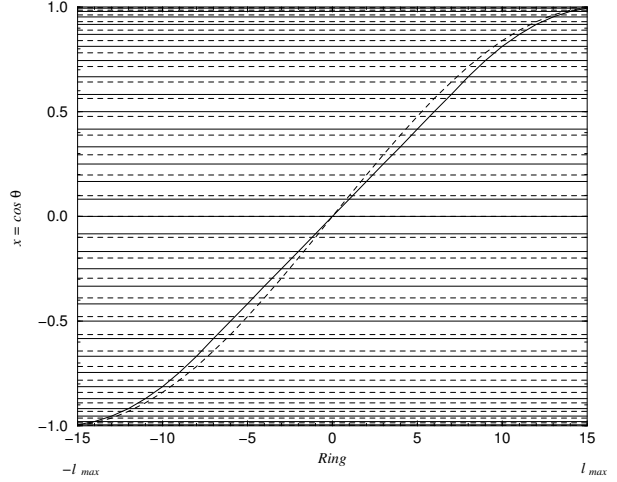


Рис. 2: Положение центров колец ($x_j = \cos\theta_j$) в зависимости от номера кольца для двух схем пикселизации. HEALPix показан сплошной линией, GLESP — штриховой. Рисунок демонстрирует случай когда $N = 31$.

см. детали в разделе 3). Угловое разрешение, достигаемое при измерении данных СМВ, определяет верхний предел суммирования в уравнении (1), $\ell \leq \ell_{max}$. Чтобы избежать ограничений Найквиста, мы используем число колец пикселов, равное $N \geq 2\ell_{max}$. Чтобы сделать пикселы в экваториальном кольце (вдоль координаты ϕ) приблизительно квадратными, число пикселов N_ϕ^{max} в этом направлении выбирается $N_\phi^{max} \approx 2N$. Число пикселов по другим кольцам, N_ϕ^j , должно определяться из условия организации размеров пикселов равными размерам экваториальных с такой точностью, с какой это возможно.

На рис. 1 показаны весовые коэффициенты w_j и положение центров пикселов для случая $N = 31$. На рис. 2 сравниваются особенности пикселизационных схем, используемых в HEALPix и GLESP (см. раздел 4). На рис. 3 сравнивается форма пикселов и их распределение на сфере в эллиптической проекции для HEALPix и GLESP.

В (1) коэффициенты $a_{\ell m}$ являются комплексными, в то время как ΔT — вещественные. В пакете GLESP, построенном исходя из определения (1), мы используем следующее представление ΔT :

$$\begin{aligned} \Delta T(\theta, \phi) &= \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} a_{\ell 0} Y_{\ell 0}(\theta, \phi) + \\ &+ \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \sum_{m=1}^{\ell} (a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) + a_{\ell, -m} Y_{\ell, -m}(\theta, \phi)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$Y_{\ell, -m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi), a_{\ell m} = (-1)^m a_{\ell, -m}^*. \quad (8)$$

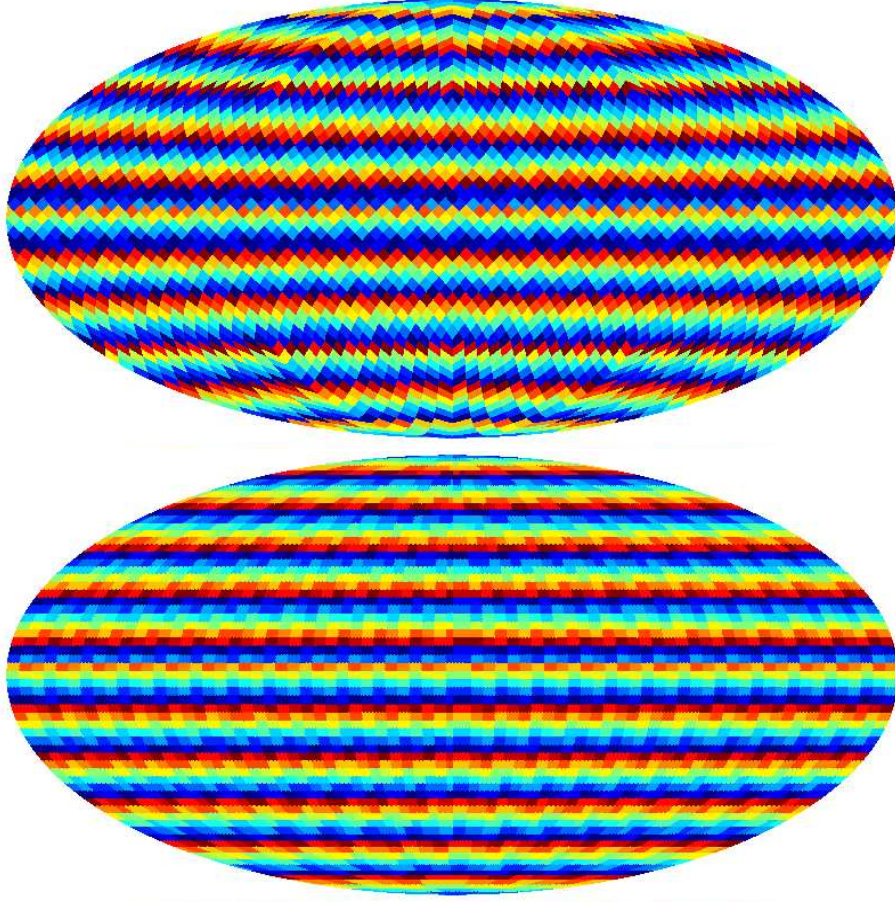


Рис. 3: Схематическое представление двух типов пикселизации на сфере: HEALPix (вверху) и GLESP (внизу). Различные цвета пикселей использованы для выделения их формы.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta T(\theta, \phi) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} Re(a_{\ell,0}) P_{\ell}^0(\cos \theta) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \sum_{m=1}^{\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \times \\ & \times [Re(a_{\ell m}) \cos(m\phi) - Im(a_{\ell m}) \sin(m\phi)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $P_{\ell}^m(\cos \theta)$ являются хорошо известными присоединенными полиномами Лежандра (см., например, Грандштейн и Рыжик, 2000). В пакете GLESP мы используем нормализованные присоединенные полиномы Лежандра f_{ℓ}^m :

$$f_{\ell}^m(x) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(x), \quad (10)$$

где $x = \cos \theta$, а θ — полярный угол. Эти полиномы $f_{\ell}^m(x)$ могут быть рассчитаны с использованием двух хорошо известных соотношений. Первое из

них дает $f_{\ell}^m(x)$ для заданного m и всех $\ell > m$:

$$\begin{aligned} f_{\ell}^m(x) = & x \sqrt{\frac{4\ell^2-1}{\ell^2-m^2}} f_{\ell-1}^m - \\ & - \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-3} \frac{(\ell-1)^2-m^2}{\ell^2-m^2}} f_{\ell-2}^m. \end{aligned} \quad (11)$$

Это соотношение стартует с

$$f_m^m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2m+1)!!}{(2m-1)!!}} (1-x^2)^{m/2},$$

$$f_{m+1}^m = x \sqrt{2m+3} f_m^m.$$

Второе рекуррентное соотношение дает $f_{\ell}^m(x)$ для заданного ℓ и всех $m \leq \ell$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\ell-m-1)(\ell+m+2)} f_{\ell}^{m+2}(x) + \\ & + \frac{2x(m+1)}{\sqrt{1-x^2}} f_{\ell}^{m+1}(x) + \\ & + \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} f_{\ell}^m(x) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это соотношение стартует с тех же $f_{\ell}^{\ell}(x)$ и $f_{\ell}^0(x)$, которые должны находиться с помощью (11).

Как уже обсуждалось (Пресс и др., 1992, пар. 5.5), первое рекуррентное соотношение (11) является формально нестабильным, если число итераций возрастает до бесконечности. К сожалению, нет теоретических рекомендаций, какая максимальная итерация может использоваться в квазистабильной области. Однако это соотношение может быть использовано, когда мы заинтересованы в так называемом *доминантном* решении (Пресс и др., 1992, пар. 5.5), которое является приближенно стабильным. Второе соотношение (12) является стабильным для всех ℓ и m .

3. Свойства GLESP

Следуя предыдущим рассуждениям, мы определяем новую схему пикселизации GLESP следующими пунктами:

- В полярном направлении $x = \cos\theta$ мы задаем $x_j, j = 1, 2, \dots, N$ как сеть корней уравнения (5).
- Каждый корень x_j определяет положение кольца с N_ϕ^j центрами пикселей с ϕ -координатами ϕ_i .
- Все пиксели имеют почти равные площади.
- Каждый пиксел имеет вес w_j (см. (6)).

Наши вычисления, реализованные для пикселизационной схемы GLESP, сделаны при следующих условиях.

- Границы всех пикселей проходят вдоль координатных линий θ и ϕ . Таким образом, с большой точностью пиксели трапециевидные.
- Число пикселей вдоль азимутального направления ϕ зависит от номера кольца. В кольце их число программа позволяет выбирать произвольно. Число пикселей зависит от ℓ_{max} , принятого для обработки данных РИ.
- Чтобы удовлетворить теореме Найквиста, число колец вдоль оси $x = \cos(\theta)$ должно быть $N \geq 2\ell_{max} + 1$.
- Чтобы сделать экваториальные пиксели приблизительно квадратными, число пикселей вдоль азимутальной оси ϕ берется равным $N_\phi^{max} = \text{int}(2\pi/d\theta_k + 0.5)$, где $k = \text{int}(N + 1)/2$, а $d\theta_k = 0.5(\theta_{k+1} - \theta_{k-1})$.
- Номинальный размер каждого пикселя определяется как $S_{pixel} = d\theta_k \times d\phi$, где $d\theta_k$ и $d\phi = 2\pi/N_\phi^{max}$ являются размерами пикселя в экваториальном кольце.
- Число пикселей N_ϕ^j в j -кольце при $x = x_j$ вычисляется как $N_\phi^j = \text{int}(2\pi\sqrt{1-x_j^2}/S_{pixel} + 0.5)$;
- Полярные пиксели — треугольные.

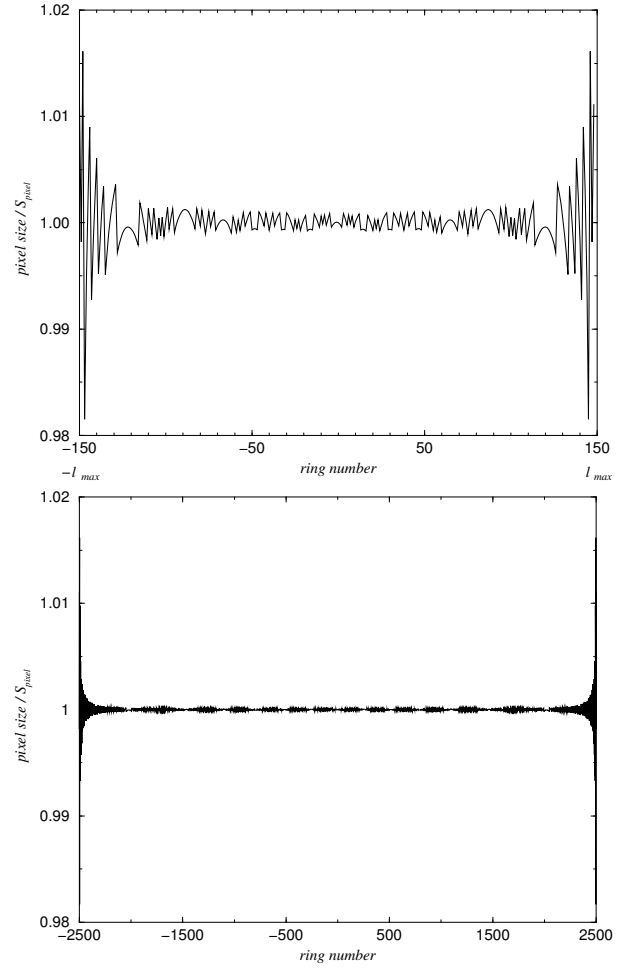


Рис. 4: Отношение размер пикселя/площадь пикселя на экваторе в зависимости от номера кольца в GLESP для числа колец $N = 300$ и $N = 5000$ соответственно.

- Так как число N_ϕ^j отличается от 2^k , где k — целое, для вычисления быстрого преобразования Фурье вдоль азимутального направления мы используем код FFTW (Фриго и Джонсон, 1997). Этот код позволяет применять не только подход 2^n , но также и другие числа оснований, и обеспечивает даже большую скорость вычислений.

По этой схеме размеры пикселей одинаковы в пределах каждого кольца и максимальное различие между пикселями различных колец составляет $\sim 1.5\%$ вблизи полюсов (рис. 4). Увеличение разрешения уменьшает абсолютную ошибку разности площадей, потому что неэквивалентность полярных и экваториальных пикселей пропорциональна N^{-2} .

На рис. 5 показана схема пикселизации для карт с высоким разрешением (например, $\ell_{max} > 500$), дающую почти равную ширину по $d\theta$ для

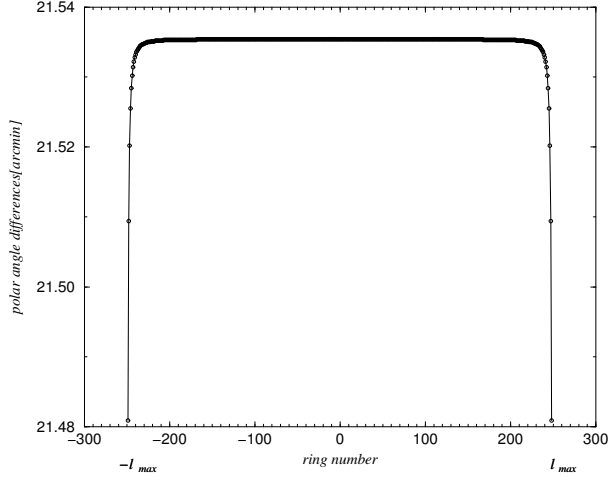


Рис. 5: Размер пиксела вдоль полярного угла ($l_{max} = 250$).

большинства колец.

GLESP не является иерархической структурой, но проблемы выборки пикселей, ближайших к заданному положению, элементарно решаются на уровне программного обеспечения. Несмотря на то, что GLESP близок к схеме пикселизации IGLOO по азимутальному подходу, между ними имеется большая разница, связанная с выбором шагов расположения пикселей по полярному углу θ . Поэтому мы не можем объединить эти две схемы пикселизации. Схема IGLOO, примененная к дискретам широты GLESP, даст слишком различные размеры пикселей. Пиксели не будут ни равно расположенными по высоте, ни однородными по площади, как того требует IGLOO.

4. Функция окна GLESP пиксела

Для применения схемы GLESP мы должны учесть влияние размера, формы и расположения пиксела на сфере на сигнал в пикселе и его вклад в спектр мощности $C(\ell)$. Температура в пикселе дается как (Горски и др., 1999; KT98):

$$\Delta T_p = \int_{\Delta\Omega_p} W_p(\theta, \phi) \Delta T(\theta, \phi) d\Omega, \quad (13)$$

где $W_p(\theta, \phi)$ — функция окна для p -ого пиксела с площадью $\Delta\Omega_p$. Для функции окна $W_p(\theta, \phi) = 1$ внутри пиксела и $W_p(\theta, \phi) = 0$ снаружи (Горски и др., 1999) из уравнений (1) и (13):

$$\Delta T_p = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} W_p(\ell, m),$$

где

$$W_p(\ell, m) = \int W_p(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) d\Omega$$

и

$$W_p(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} W_p(\ell, m) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi). \quad (14)$$

Соответствующая корреляционная функция (KT98) для пикселизованного сигнала

$$\langle \Delta T_p \Delta T_q \rangle = \sum_{\ell, m} C(\ell) W_p(\ell, m) W_q^*(\ell, m). \quad (15)$$

4.1. Точность оценки функции окна

Дискретность пикселизованной карты определяет свойства сигнала и ограничивает точность, достигаемую в любой пикселизационной схеме. Чтобы оценить эту точность, мы можем использовать разложение (KT98):

$$\begin{aligned} \Delta T^{map}(\theta, \phi) &= \sum_p S_p \Delta T_p W_p(\theta, \phi) = \\ &= \sum_{\ell, m} a_{\ell m}^{map} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^{map} &= \int d\Omega \Delta T^{map}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = \\ &= \sum_p S_p \Delta T_p W_p^*(\ell, m), \end{aligned} \quad (17)$$

где S_p — площадь p -ого пиксела. Эти соотношения обобщают уравнение (3), учитывая свойства функции окна. Схема GLESP использует свойства интегрирования Гаусса–Лежандра в полярном направлении, в то время как азимутальная пикселизация для каждого кольца подобна схеме IGLOO, и мы получаем (см (4)):

$$\begin{aligned} W_p(\ell, m) &= \frac{w_p}{\sqrt{2\pi}\Delta x_p} \exp\left(\frac{im\pi}{N_\phi^p}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N_\phi^p}\right)}{\left(\frac{\pi m}{N_\phi^p}\right)} \times \\ &\times \int_{x_p-0.5\Delta x_p}^{x_p+0.5\Delta x_p} f_\ell^m(x) dx, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Delta x_p = (x_{p+1} - x_{p-1})/2$ с x_p — p -ым узлом по Гауссу–Лежандру, а N_ϕ^p — число пикселей в азимутальном направлении. Этот интеграл может быть переписан как:

$$\begin{aligned} \int_{x_p-0.5\Delta x_p}^{x_p+0.5\Delta x_p} f_\ell^m(x) dx &\simeq \\ &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{(k+1)!} f_\ell^{(k)m}(x_p) \left(\frac{\Delta x_p}{2}\right)^{k+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $f_\ell^{(k)m}(x_p)$ обозначает k -ую производную в $x = x_p$. Тогда для $\Delta x_p \ll 1$ получаем разложение (18):

$$W_p^{(2)}(\ell, m) = W_p^{(0)}(\ell, m) \left(1 + \frac{f_\ell^{(2)m}(\Delta x_p)^2}{24 f_\ell^m}\right), \quad (20)$$

где $W_p^{(0)}(\ell, m) \simeq$

$$\simeq \frac{w_p}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{im\pi}{N_\phi^p}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N_\phi^p}\right)}{\left(\frac{\pi m}{N_\phi^p}\right)} f_\ell^m(x_p), \quad (21)$$

и $W_p^0(\ell, m)$ не зависят от Δx_p . Точность этой оценки

$$\frac{\delta W_p(\ell, m)}{W_p(\ell, m)} = \frac{W_p^{(2)}(\ell, m) - W_p^{(0)}(\ell, m)}{W_p^{(0)}(\ell, m)} \simeq$$

$$\simeq \left| \frac{(f''_\ell)^m (\Delta x_p)^2}{24 f_\ell^m} \right|. \quad (22)$$

В соответствии с последней модификацией HEALPix точность воспроизводства функции окна пиксела порядка 10^{-3} . Чтобы получить такую же точность для $W_p(\ell, m)$, нам необходимо иметь

$$\Delta x_p \leq 0.15 \left| \frac{f_\ell^m}{(f''_\ell)^m} \right|^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{x=x_p}. \quad (23)$$

Используя приближенную связь между функциями Лежандра и Бесселя для больших ℓ (Грандштейн и Рыжик, 2000) $f_\ell^m \propto J_m(\ell x)$ получаем:

$$\Delta x_p \leq 0.15 x_p / \sqrt{m(m+1)}, \quad (24)$$

и для $\Delta x_p \sim \pi/N$ мы имеем из (24)

$$\frac{\delta W_p(\ell, m)}{W_p(\ell, m)} \geq 10^{-2} \cdot \left(\frac{\ell_{max}}{N} \right)^2. \quad (25)$$

Например, для $N = 2\ell_{max}$ получаем $\delta W_p(\ell, m)/W_p(\ell, m) \simeq 2.3 \cdot 10^{-3}$, что является совершенно разумной точностью для $\ell_{max} \sim 3000-6000$.

5. Структура пакета GLESP

Пакет организован и развивается на двух уровнях. Первый, объединяющий функции Фортрана F77 и C, подпрограммы и процедуры-связки между разными языками, состоит из главных процедур: 'signal', которая обращает значения $a_{\ell m}$ в карту на сфере; 'alm', которая вычисляет $a_{\ell m}$ по данным карты; 'cl2alm', которая моделирует $a_{\ell m}$ -коэффициенты для заданного набора C_ℓ ; и 'alm2cl', которая вычисляет C_ℓ для $a_{\ell m}$. Процедуры тестирования кода, управления параметрами, анализа на гауссовость (в том числе и тест Колмогорова–Смирнова) коэффициентов $a_{\ell m}$ и однородность распределения фаз, а также другие, тоже включены в пакет. Работа этих процедур основана на другом блоке подпрограмм, вычисляющих пикселизацию по Гауссу–Лежандру для заданного разрешения, пересчета угла на небе в номер соответствующего пиксела и обратно.

Второй уровень пакета содержит программы, реализующие процедуры первого уровня. В дополнение к сказанному, имеются еще процедуры, вычисляющие аналитические функции — шаблоны, генерирующие карты со сферическими функциями, такими, как, например, Y_{20} , Y_{21} и Y_{22} . Имеются также программы сравнения наборов $a_{\ell m}$ -коэффициентов, конвертирования карты GLESP в формат HEALPix и обратно.

На рис. 6 демонстрируется организация пакета GLESP. Круг определяет зону влияния GLESP, основанную на библиотеке пикселизации. Она может включать несколько процедур и действующих программ. Основная программа второго уровня 'cl_map', показанная как большой прямоугольник, взаимодействует с процедурами первого уровня. Эти процедуры показаны маленькими прямоугольниками и вызывают внешние библиотеки преобразования Фурье и вычисления полиномов Лежандра. Пакет читает и записывает данные как в виде ASCII-таблиц, так и в виде FITS-формата. Более 15-ти программ пакета GLESP работают в зоне GLESP.

К настоящему моменту в пакете также реализованы процедуры параллельных вычислений. Процедуры динамической визуализации с использованием библиотеки OPEN GL развиваются в Институте астрономии в Кембридже.

5.1. Базовые принципы организации пакета GLESP

Пакет реализован в соответствии с идеологией системы обработки FADPS (Верходанов и др., 1993; Верходанов, 1997). Он удовлетворяет следующим принципам:

- Каждая программа разрабатывалась таким образом, чтобы ее можно было легко подключить к другим модулям пакета. Она работает как с заданным файлом, так и со стандартным вводом/выводом.
- Каждая программа может работать отдельно от пакета.
- Каждая программа имеет доступ с командной строки и управляется внешними параметрами. Кроме того, она может работать в диалоговом режиме и в ряде случаев управляться также файлом настройки.
- Формат вывода результирующих данных организован стандартным путем и оформляется в виде FITS- или F-форматов (Верходанов и Кононов, 2002) или ASCII-таблиц, доступных для других пакетов.
- Пакет программ может взаимодействовать (вводить и выводить данные) с другими процедурами.

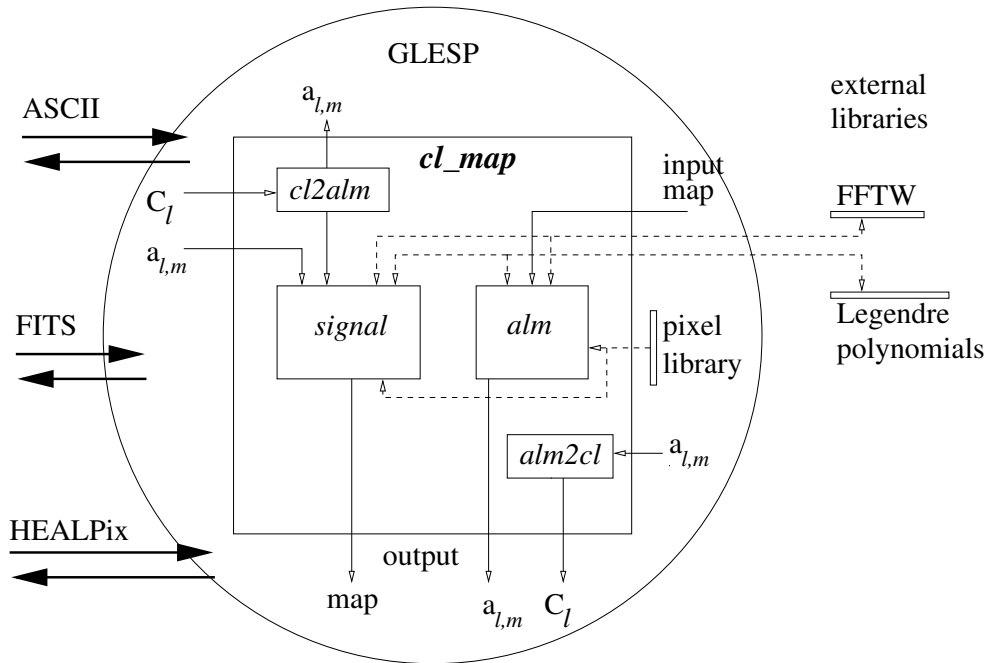


Рис. 6: Структура пакета GLESP.

рами FADPS и базой данных CATS.

5.2. Основные операции

В пакете GLESP имеется четыре группы операций с данными:

- Операции с картами:

1. Разложение карты по сферическим гармоникам $a_{\ell m}$ (*cl2alm*).
2. Сглаживание карты гауссовой диаграммой направленности (*cl2map*).
3. Нахождение суммы/разности/среднего нескольких карт (*difmap*).
4. Скалярное умножение/деление (*difmap*).
5. Вращение карты (*difmap*).
6. Преобразование координатной сетки из галактических координат в экваториальные с соответствующим вращением карты (*difmap*).
7. Обрезание карты по заданным температурным пределам (*mapcut*).
8. Выделение области на карте с занулением значений внутри/снаружи зоны (*mapcut*).
9. Вырезание сечений из карты (*mapcut*).
10. Подготовка стандартных шаблонов карт (*mappat*).
11. Перевод карты, заданной в ASCII-кодах в FITS (*mappat*).
12. Чтение таблицы точечных источников и наложение их на карту (*mappat*).
13. Распечатка значений в пикселах карты в ASCII-формате (*mapcut*).

14. Поиск минимального/максимального значения в пикселе (*difmap*).

15. Простейший статистический анализ карты (*difmap*).

16. Поиск коэффициента корреляции двух карт (*difmap*).

17. Оценка размера пиксела карты (*ntot*).

18. Построение изображений карт (*f2fig*).

- Операции над коэффициентами $a_{\ell m}$:

1. Синтез карты по данным $a_{\ell m}$ (*cl2map*).

2. Поиск сумм/разностей (*difalm*).

3. Скалярное умножение/деление (*difalm*).

4. Векторное умножение/деление (*difalm*).

5. Добавление фазы во все гармоники (*difalm*).

6. Вырезание заданной моды из гармоник (*difalm*).

7. Расчет спектра мощности C_ℓ (*alm2dl*).

8. Расчет фаз гармоник (*alm2dl*).

9. Выборка гармоник с заданной фазой (*alm2dl*).

10. Сравнение двух наборов коэффициентов $a_{\ell m}$ (*checkalm*).

11. Вычисление $a_{\ell m}$ для производных карт по обеим координатам (*dalm*).

- Операции со спектром мощности C_ℓ :

1. Вычисление спектра мощности C_ℓ (*alm2dl*).

2. Моделирование карты для заданного C_ℓ (*cl2map*).

3. Моделирование коэффициентов $a_{\ell m}$ для заданного C_ℓ (*createalm*).

• Операции с фазами гармоник $\phi_{\ell m}$ и амплитудами $|a_{\ell m}|$:

1. Вычисление фаз $\phi_{\ell m}$ (*alm2dl*).
2. Вычисление амплитуд $|a_{\ell m}|$ (*alm2dl*).
3. Моделирование $a_{\ell m}$ по фазам (*createalm*).
4. Выбор гармоник с данной фазой (*alm2dl*).
5. Добавление заданной фазы ко всем гармоникам (*difalm*).

5.3. Основные программы

Сейчас реализованы следующие процедуры, организованные как отдельные программы, работающие в частотно–пространственной или пиксельной области:

alm2dl вычисляет спектры и фазы по $a_{\ell m}$ -коэффициентам.

checkalm сравнивает различные наборы $a_{\ell m}$.

ctmap конвертирует карты из HEALPix формата в GLESP.

cl2map обращает карту в $a_{\ell m}$ -коэффициенты и $a_{\ell m}$ -коэффициенты в карту, моделирует карту по заданному C_ℓ -спектру.

createalm создает $a_{\ell m}$ -коэффициенты по фазам, амплитудам и/или C_ℓ -спектру.

dalm вычисляет первую и вторую производные карт по $a_{\ell m}$ -коэффициентам.

difalm производит арифметические действия над наборами $a_{\ell m}$.

difmap производит арифметические действия над картами, а также делает координатные преобразования.

f2fig строит цветные изображения карт в формате GIF.

f2map преобразует карту GLESP в формат HEALPix.

fitstof преобразует формат записи $a_{\ell m}$ -коэффициентов из FITS в F.

ftofits преобразует формат записи $a_{\ell m}$ -коэффициентов из F в FITS.

marcut обрезает амплитуды и вырезает координаты на карте GLESP, строит одномерные и двумерные сечения для моделирования наблюдений на PATAH-600 для исследования РИ (Парийский, 2001).

mappat создает стандартные образцы карт, читает ASCII-данные для построения карт, читает положения точечных источников из ASCII-файлов, содержащих вывод базы данных CATS (Верходанов и др., 1997b).

psep производит фазовый анализ и разделение компонент по двум наборам $a_{\ell m}$ (Насельский и др., 2003a).

5.4. Формат данных

Данные GLESP представлены в двух форматах, описывающих $a_{\ell m}$ -коэффициенты и карты.

Данные с $a_{\ell m}$ -коэффициентами содержат индекс, описывающий номера ℓ и m -мод, соответственно, в том же формате, что и HEALPix, и вещественную и мнимую части $a_{\ell m}$. Эти три параметра описаны по правилам записей с тремя полями как Binary Table для F-формата (Верходанов и Кононов, 2002).

Данные карт описываются тремя полями как Binary Table в F-формате, содержащими вектор положений $x_i = \cos \theta$, вектор значений числа пикселей в каждом кольце N_{ϕ_i} , а также массив температур в каждом пикселе, записываемый от Северного полюса.

6. Тестирование и точность кода GLESP

Три теста позволяют нам проверить код. Первый из них заключается в рассмотрении аналитических карт

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3x^2 - 1),$$

$$Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}x\sqrt{1-x^2}\cos\phi,$$

$$Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}x\sqrt{1-x^2}\sin\phi,$$

$$Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(1-x^2)\cos(2\phi),$$

$$Y_{2,-2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}(1-x^2)\sin(2\phi),$$

по которым вычисляются величины коэффициентов $a_{\ell m}$. Программы дают значения теоретических величин $a_{\ell m}$ с точностью лучше 10^{-7} .

Второй тест воспроизводит аналитическую карту $\Delta T(x, \phi) = Y_{\ell m}(x, \phi)$ для заданных $a_{\ell m}$. Оба эти теста проверяют точность вычисления карт и сферических гармоник независимо.

Третий тест заключается в вычислении $a_{\ell m}$ после построения карты $\Delta T(x, \phi)$ по входным коэффициентам, а также наоборот. Этот тест позволяет проверить ортогональность. Если преобразование основано на действительно ортогональных функциях, то оно должно возвращать те же значения $a_{\ell m}$ -коэффициентов или пикселей в картах, что и исходные величины.

Точность кода можно оценить введением набора $a_{\ell m} = 1$ и восстановлением его после обращения. Этот тест показал, что, используя соотношение (11), мы можем воспроизвести введенные $a_{\ell m}$ с точностью $\sim 10^{-7}$, ограниченной только точностью представления плавающего числа. Для соотношения (12) точность составляет $\sim 10^{-5}$.

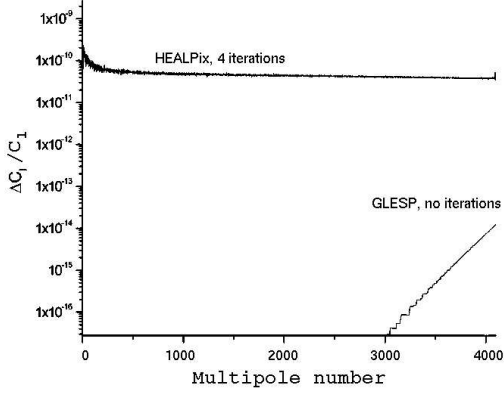


Рис. 7: Сравнение точности вычислений в пакетах HEALPix версии 1.20 (4 итерации) и в GLESP (вычисляется без итераций). Количество пикселей приблизительно одинаковое ($\sim 6 \times 10^7$), а время вычисления пропорционально числу итераций.

На рис. 7 сравнены точность вычисления C_ℓ с использованием пакетов HEALPix и GLESP².

Необходимо отметить, что, в отличие от кода HEALPix, методика GLESP не требует итерационного подхода при вычислении $a_{\ell m}$ -коэффициентов, и поэтому значительно быстрее. Наше определение $a_{\ell m}$ -коэффициентов в точности такое же, как и в HEALPix, которое используется для оценки спектра мощности:

$$C(\ell) = \frac{1}{2\ell + 1} \left[|a_{\ell 0}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \right]. \quad (26)$$

7. Репикселизация

Чтобы преобразовать карту с распределенным сигналом из одной сетки пикселей в другую (например, из HEALPix в GLESP), мы должны использовать один из двух методов:

1) рассчитать коэффициенты $a_{\ell m}$, после чего восстановить новую карту;

2) использовать процедуры репикселизации для текущего распределения яркости.

Любая процедура репикселизации приведет к потере информации и внесет новые ошибки и невязки. Пакет GLESP дает возможность для репикселизации карт с использованием двух различных методов в области $\Delta T(\theta, \phi)$: первый заключается в осреднении входящих величин в соответствующем пикселе, второй связан со сплайновой интерполяцией внутри сетки пикселей.

В первом методе мы рассматриваем входящие пиксели, которые попадают в наш новый пиксел с величинами $\Delta T(\theta_i, \phi_i)$ с дальнейшим осреднением с помощью весовой функции. Реализованная весовая функция — простое осреднение с равными весами. Этот метод является широко распространенным при присвоении заданных значений пикселу с соответствующим номером.

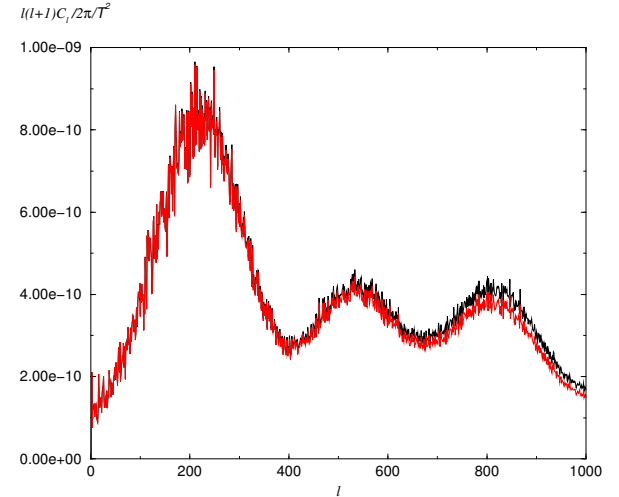


Рис. 8: Спектры мощности, рассчитанные для исходной карты HEALPix (верхняя кривая) с $\ell_{max} = 1000$, $N_{side} = 1024$, размером пиксела = $11.8026\pi'$, и числом пикселей $N_{tot} = 12\,582\,912$, и для результирующей репикселизированной карты GLESP (нижняя кривая) с ближайшим возможным размером пиксела = $11.8038\pi'$, $N_{tot} = 12\,581\,579$. Отклонения спектра мощности на высоких ℓ показывают отношение функций окон для HEALPix и GLESP.

Во втором методе репикселизации мы используем интерполяцию сплайнами. Если у нас есть карта $\Delta T(\theta_i, \phi_i)$, записанная в узлах, отличных от сетки Гаусса–Лежандра, то мы можем репикселизовать ее в нашу новую сетку $\Delta T(\theta'_i, \phi'_i)$, используя приблизительно равное число пикселей и стандартную интерполяционную схему, основанную на кубических сплайнах. Этот подход достаточно быстрый, так как сплайн рассчитывается один раз

² Провел вычисления и построил рисунок Владислав Столяров, Институт астрономии, Кембридж

для одного вектора табулированных данных (например, в одном кольце), а величины интерполируемой функции для любого входного аргумента получаются единственным вызовом отдельной процедуры (см. подпрограммы “*spline*” для расчета вторых производных интерполируемых функций и “*splint*” для получения интерполированной величины кубическим сплайном в книге Пресса и др. (1992)).

Наша сплайновая интерполяция состоит из трех шагов:

- построение сетки равноотстоящих узлов по оси ϕ для всех полярных углов;
- изменение сетки по оси $x = \cos(\theta)$ в соответствии с узлами сетки GLESP;
- вычисление соответствующих узлов по оси ϕ для колец GLESP, проходящих через x -точки.

Рис. 8 демонстрирует отклонение точности спектра мощности в случае репикселизации из карты HEALPix в карту GLESP с одинаковым разрешением. Как видно из рисунка, для диапазона $\ell \leq \ell_{max}/2$ репикселизация воспроизводит корректно все свойства спектра мощности. Для $\ell \geq \ell_{max}/2$ должны быть проведены дополнительные исследования, чтобы учесть функцию окна пиксела. Эти исследования продолжаются.

8. Резюме

Мы предлагаем новую схему GLESP для пикселизации неба, основанную на нулях квадратуры Гаусса–Лежандра. Она дает строгое разложение по ортогональным функциям и позволяет получать точность вычисления коэффициентов $a_{\ell m}$ лучше 10^{-7} без применения итерации. Мы реализовали два подхода вычисления полиномов Лежандра, используя L - и M -методы расчетных схем.

Среди основных преимуществ нашей схемы выделим:

- высокую точность вычисления $a_{\ell m}$,
- высокую скорость вычисления из-за безытерационного подхода,
- оптимальный выбор разрешения для заданного размера диаграммы, который означает оптимальное число пикселов и размер пиксела.

Соответствующие программы были разработаны на алгоритмических языках Фортран 77 и С для процедур анализа данных CMB на небесной сфере.

Вычисление коэффициентов $a_{\ell m}$ является основной целью данного пакета. Они используются при разделении компонент и тестов на негауссовость (Чианг и др., 2003, Насельский и

др., 2003а,б). GLESP ориентирован на быстрое и точное вычисление $a_{\ell m}$ для заданного разрешения. Используя точно рассчитанные коэффициенты $a_{\ell m}$, можно воспроизвести любую схему пикселизации для заданных центров пикселов: GLESP, HEALPix, IGLOO или икосаэдрную.

Благодарности. Эта работа была частично финансирована Датским фондом научных исследований (Danmark Grundforskningsfond) через его поддержку открытия Центра теоретической астрофизики. Авторы благодарны Владиславу Столярову за тестирование возможности параллельных вычислений и динамическую визуализацию с помощью библиотеки OpenGL для нулевой версии GLESP. ОВБ благодарит РФФИ за частичную поддержку данной работы грантом No 02–07–90038. Некоторые результаты данной работы были получены с помощью пакета HEALPix (Горски и др., 1999).

Список литературы

- Верходанов и др. (Verkhodanov O.V., Erukhimov B.L., Monosov M.L., Chernenkov V.N., Shergin V.S.), 1993, *Astrofiz. Issled. (Izv. SAO)*, **36**, 132
- Верходанов (Verkhodanov O.V.), 1997, in: “Astronomical Data Analysis Software and Systems VI”, eds.: G.Hunt & H.E.Payne, ASP Conf. Ser., **125**, 46
- Верходанов и др. (Verkhodanov O.V., Trushkin S.A., Andernach H., Chernenkov V.N.), 1997, in: “Astronomical Data Analysis Software and Systems VI”, eds.: G.Hunt & H.E.Payne, ASP Conf. Ser., **125**, 322
- Верходанов и Кононов (Verkhodanov O.V., Kononov V.K.), 2002, *Бюлл. Спец. астрофиз. обсерв.*, **53**, 119
- Верходанов и др. (Verkhodanov O.V., Doroshkevich A.G., Naselsky P.D., Turchaninov V.I., Novikov I.D., Cristensen P.R.), 2003, in: Book of Abstracts, Danish Phys. Soc. Ann. Meeting, 2003, Hotel Nyborg Strand, June 12-13, HCOe Tryk, Kobenhavn, AA30P
- Верходанов О.В., Дорошкевич А.Г., Насельский П.Д., Новиков Д.И., Турчанинов В.И., Новиков И.Д., Кристенсен П.Р., 2004, в сб.: Труды Астроном. Инст. им. Штернберга, Т.**LXXV**, Тез. Всероссийской Астрон. Конф. ВАК-2004 “Горизонты Вселенной”, МГУ, ISSN 0371-6769, 184
- Горски и др. (Górski K.M., Hivon E., & Wandelt B.D.), 1999, in: “Evolution of Large-Scale Structure: from Recombination to Garching” (<http://www.eso.org/science/healpix>)
- Градштейн и Рыжик (Gradsteyn I.S., Ryzhik I.M.), 2000, *Tables of Integrals, Series and Products*, Sixth Edition, Academic Press
- Грейсен и Калабретта (Greisen E.W., Calabretta M.), 1993, *Bull. American Astron. Soc.*, **182**, 09.01
- Дорошкевич и др. (Doroshkevich A.G., Naselsky P.D., Verkhodanov O.V., Novikov D.I., Turchaninov V.I., Novikov I.D., Christensen P.R., Chiang L.-Y.), 2003, accepted to *Internat. J. Modern Phys. D*, **14**, No. 7 (astro-ph/0305537)

- Коулс и др. (Coles P., Dineen P., Earl J., Wright D.), 2004, *MNRAS*, **350**, 989 (astro-ph/0310252)
- Криттенден и Турок (Crittenden R.G., Turok N.G.), 1998, Exactly Azimuthal Pixelizations of the Sky, Report-no: DAMTP-1998-78 (astro-ph/9806374) (КТ98)
- Насельский и др. (Naselsky P.D., Verkhodanov O.V., Chiang L.-Y., Novikov I.D.), 2003a, *ApJ*(submitted) (astro-ph/0310235)
- Насельский и др. (Naselsky P.D., Doroshkevich A.G., Verkhodanov O.V.), 2003b, *ApJ*, **599**, L53 (astro-ph/0310542)
- Насельский и др. (Naselsky P.D., Doroshkevich A.G., Verkhodanov O.V.), 2004, *MNRAS*, **349**, 695 (astro-ph/0310601)
- О'Нил и Лаубшер (O'Neil E.M., Laubscher R.E.), 1976, Extended studies of a quadrilateralized spherical cube Earth data base, Computer Sciences Corp., EPRF Technical Report
- Парийский (Parijskij Yu N.), 2001, Current Topics in Astrofundamental Physics: the Cosmic Microwave Background. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, held December 5–16, 1999, in Erice, Etta Majorana Centre, Italy. Edited by Norma G. Sanchez. Published by Kluwer Academic Publishers, P. O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, ISBN 0-7923-6855-X, 219
- Пресс и др. (Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.), 1992, Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition, Cambridge University Press (<http://www.nr.com>)
- Столяров и др. (Stolyarov V., Hobson M.P., Ashdown M.A.J., Lasenby A.N.), 2002, *MNRAS*, **336**, 97
- Тегмарк (Tegmark M.), 1996, *ApJ*, **470**, L81
- Фриго и Джонсон (Frigo M., Johnson S.G.), 1997, The Fastest Fourier Transform in the West, Technical Report MIT-LCS-TR-728 (<http://www.fftw.org>)
- Хивон и др. (Hivon, E., Górski, K.M., Netterfield, C.B.), Crill, B.P., Prunet, S., & Hansen, F., 2002, *ApJ*, **567**, 2
- Чан и О'Нил (Chan F.K., O'Neil E.M.), 1976, Feasibility study of a quadrilateralized spherical cube Earth data base, Computer Sciences Corp., EPRF Technical Report
- Чианг и др. (Chiang L.-Y., Naselsky P.D., Verkhodanov O.V., Way M.J.), 2003, *ApJ*, **590**, L65 (astro-ph/0303643)