УДК 520.27

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ МЮЛЛЕРА ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

*В. И. Абрамов*

На основе матричной теории представления и преобразования состояния поляризации квазимонохроматического излучения рассмотрены общие свойства матрицы Мюллера (приборного оператора), связывающей векторы Стокса на входе и выходе поляризационных систем. Показано, что матрица недеполяризующей системы псевдоортогональна с точностью до нормировочного коэффициента. В качестве иллюстрации применения полученных в работе формул дается геометрическая интерпретация воздействия поляризационной системы на состояние поляризации излучения, а также рассмотрены некоторые вопросы экспериментального исследования матрицы Мюллера антенны радиотелескопа и анализа результатов поляризационных измерений частично поляризованных точечных источников.

On the basis of matrix theory of representation and transformation of quasimonochromatic emission polarization the common features of Müller matrix (device operator) connecting Stocks vectors on the input and output of polarization systems are considered. It is shown that matrix of nondepolarized system is pseudoorthogonal with an accuracy to the normalized coefficient. Geometrical interpretation of the polarization system effect upon the emission polarization illustrate the use of the obtained formulas. Some questions for the experimental investigation of Müller matrix of the radiotelescope antenna, and of analysis of polarization measurement results of the partially polarized point sources are considered.

Повышение точности поляризационных измерений, в частности, радиоастрономических, связано прежде всего с учетом воздействия прибора на состояние поляризации исследуемого излучения [1—4]. В свою очередь, последовательный учет невозможен без привлечения теории представления и преобразования состояния поляризации излучения, особенно при использовании радиотелескопов, обладающих сложными поляризационными характеристиками, например БПР [5], РАТАН-600 [6]. Для поляризационных измерений частично поляризованного квазимонохроматического излучения практический интерес представляют методы матрицы когерентности и метод Мюллера [2—4]. В первом методе состояние поляризации описывается эрмитовой $2\times2$-матрицей когерентности, преобразование которой при прохождении излучения через поляризационную систему осуществляется с помощью двух комплексных $2\times2$-матриц Джонса. Во втором — излучение описывается действительным четырехвектором Стокса, а его преобразование осуществляется простым умножением слева на действительную $4\times4$-матрицу Мюллера системы.

В радиоастрономических поляризационных измерениях использование метода Мюллера оказывается более предпочтительным, что обусловлено по крайней мере тремя факторами.

Во-первых, метод Мюллера оперирует с действительными однородными (имеющими размерность интенсивности) величинами — параметрами Стокса, которые непосредственно измеряются поляриметром.

Во-вторых, элементы матрицы Мюллера имеют простой физический смысл (коэффициентов связи между входными и выходными параметрами Стокса), а воздействие системы на состояние поляризации излучения допускает наглядную геометрическую интерпретацию (вращение четырехвектора Стокса в четырехмерном пространстве Минковского).

В-третьих, метод Мюллера более универсален и применим для описания любых поляризационных систем, в частности деполяризующих (т. е. вносящих случайные во времени изменения в амплитуды и фазы ортогонально поляризованных компонент [4]), когда метод матрицы когерентности теряет силу.

Как известно, матрица Мюллера недеполяризующей системы однозначно определяется ее матрицей Джонса [3, 4]. Поэтому она не может быть произвольной действительной $4\times4$-матрицей, а должна обладать некоторыми общими свойствами, справедливыми для любой системы, что неоднократно отмечалось в ряде работ [7—9]. Однако, несмотря на все более широкое применение метода Мюллера как в оптике [4], так и в радиоастрономии [10—12], общие свойства матрицы Мюллера еще недостаточно изучены и отражены в литературе. С другой стороны, знание их не только способствует более глубокому физическому пониманию вопроса, но и может также упростить анализ результатов поляризационных измерений.

Целью настоящей работы является определение некоторых наиболее общих свойств матрицы Мюллера недеполяризующих систем.

В § 1 введены основные определения и формулы теории представления и преобразования состояния поляризации квазимонохроматических полей, необходимые нам для большей последовательности изложения материала.

В § 2 получены свойства матрицы Мюллера, в частности важное свойство псевдоортогональности, на основе которых в § 3 дана геометрическая интерпретация воздействия поляризационной системы на состояние поляризации частично поляризованного излучения.

**1. Основные определения и формулы [2—4, 9, 13—16].** Будем предполагать, что мы имеем дело с плоскими волновыми случайными полями, при этом выполняются следующие условия.

1. Условие квазимонохроматичности, т. е. спектральная ширина излучения или ширина полосы пропускания поляриметра $\Delta\nu$ малы по сравнению с центральной частотой $\nu_0$:

$$\Delta\nu \ll \nu_0.$$

В квазимонохроматическом приближении все частотнозависимые величины можно вычислять на средней частоте $\nu_0$ и непосредственно воздействовать не на отдельные соответствующие частотные Фурье-составляющие поля, а на сами ортогонально поляризованные компоненты поля.

2. Поляризационная система является недеполяризующей, причем разность хода $\Delta l$ между любыми ортогонально поляризованными компонентами, обусловленная взаимодействием излучения с системой, мала по сравнению с длиной цуга когерентности:

$$\Delta l \ll v/\Delta v,$$

где $v$ — фазовая скорость волны.

Обычно в радиоастрономических поляризационных измерениях отмеченные условия выполняются в случае точечных источников.

1.1. Описание состояния поляризации излучения. Состояние поляризации частично поляризованного квазимонохроматического излучения можно описывать с помощью обобщенных матрицы когерентности $\mathcal{J}$, вектора когерентности $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ и вектора Стокса $\mathbf{S}$, определяемых через обобщенный комплексный вектор Джонса $\mathbf{E}_{1,2}$ плоской волны следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \widetilde{\mathbf{E}_{1,2} \otimes \mathbf{E}^{+}_{1,2}}; \\ \mathbf{S} &\equiv A\boldsymbol{\mathcal{J}} \equiv A\,\widetilde{(\mathbf{E}_{1,2} \otimes \mathbf{E}^{*}_{1,2})}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В формулах (1.1) приняты следующие обозначения. Знаки $\widetilde{\ }$, $\otimes$, $+$, $*$ обозначают соответственно операции усреднения за время $\tau \gg 1/\Delta\nu$ кронекеровского произведения [17] матриц, взятие эрмитово-сопряженной и комплексно-сопряженной матриц.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(A^{-1} = \frac{1}{2}A^{+}\right). \tag{1.2}$$

Обобщенный двухкомпонентный вектор-столбец Джонса $\mathbf{E}_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{E}_2 \end{bmatrix}$ записан в некотором произвольном поляризационном базисе (ПБ) $\mathbf{e}_{1,2}$:

$$\mathbf{E}_{1,2} = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2,$$

причем комплексные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, описывающие пару ортогональных эллиптически поляризованных волн, удовлетворяют условию ортонормированности: $\mathbf{e}_i^+\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$ ($\delta_{ij}$ — дельта Кронекера; $i, j=1, 2$), а $E_1$ и $E_2$ — случайные комплексные величины, мало меняющиеся за время $1/\nu_0$.

Обобщенные векторы $\mathbf{E}_{1,\,2}$ и $\mathbf{e}_{1,\,2}$ связаны с соответствующими декартовыми векторами $\mathbf{E}_{x,y}$ и $\mathbf{e}_x\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ с помощью унитарной матрицы $F$:

$$\begin{matrix}\mathbf{e}_{1,\,2}=\tilde{F}\mathbf{e}_{x,\,y}; \\ \mathbf{E}_{x,\,y}=F\mathbf{E}_{1,\,2}\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix}\mathbf{e}_{x,\,y}=F^*\mathbf{e}_{1,\,2}; \\ \mathbf{E}_{1,\,2}=F^{-1}\mathbf{E}_{x,\,y},\end{matrix} \tag{1.3}$$

где знак $\sim$ обозначает операцию транспонирования матрицы.

Условимся считать, что ось $x$ правовинтовой декартовой системы координат ($x$, $y$, $z$) направлена вверх по вертикали, а ось $z$ — вдоль направления распространения волны. Будем использовать временной множитель $\exp(i\omega t)$, так что для правой (r), поляризованной по кругу волны (вращение вектора $E$ при распространении волны соответствует правому винту) $\mathrm{Im}\,[E_y/E_x]<0$. Тогда выражения для матриц $F$, отвечающих переходу от декартового ПБ ($\mathbf{e}_{x,y}$) к круговому ПБ $\left(\mathbf{e}_r=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_l=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\right)$ и декартовому ПБ, повернутому в соответствии с правым вращением на угол $\alpha\left(\mathbf{e}_{x'}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_{y'}=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}\right)$ запишутся в виде:

$$F^{r,\,l}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{bmatrix};\quad F^{x',\,y'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

В случае произвольного ПБ $\mathbf{e}_{1,\,2}$ матрицу $F^{1,\,2}$ можно представить следующим образом:

$$F^{1,\,2}=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\chi-i\sin\beta\sin\chi & -\cos\beta\sin\chi+i\sin\beta\cos\chi\\ \cos\beta\sin\chi+i\sin\beta\cos\chi & \cos\beta\cos\chi+i\sin\beta\sin\chi\end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

где пара углов ($\beta$, $\chi$) описывает правополяризованный орт $\mathbf{e}_1$, а пара углов ($-\beta$, $\chi+\pi/2$) — левополяризованный орт $\mathbf{e}_2$ ($\chi$ — азимутальный угол эллипса поляризации, т. е. угол между большой осью эллипса и осью $x$; $r=\mathrm{tg}\,\beta$ — коэффициент эллиптичности, т. е. отношение малой оси эллипса к большой, причем для правой поляризации $\beta<0$).

В частном случае, когда $\beta=-\frac{\pi}{4}$, $\chi=\frac{\pi}{4}$, матрица $F^{1,\,2}=\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)F^{r,\,l}$, а при $\beta=0$, $\chi=0$ матрица $F^{1,\,2}=F^{x',\,y'}$.

Заметим, что для введенного выше ПБ $\mathbf{e}_{r,l}$ фаза отсчитывается от оси $x$, а для ПБ $\mathbf{e}_{1,\,2}$ — от больших осей эллипсов.

Выражения для декартового и кругового векторов Джонса полностью поляризованной волны, характеризуемой произвольным эллипсом (с амплитудой $A$, фазой $\delta$, азимутальным углом $\chi$ и углом эллиптичности $\beta$), записываются в виде:

$$\mathbf{E}_{x,\,y}\equiv\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\end{bmatrix}=A\exp(i\delta)\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\chi-i\sin\beta\sin\chi\\ \cos\beta\sin\chi+i\sin\beta\cos\chi\end{bmatrix}; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{E}_{r,\,l}\equiv\begin{bmatrix}E_r\\ E_l\end{bmatrix}(F^{r,\,l})^{-1}\,\mathbf{E}_{x,\,y}=\frac{1}{\sqrt{2}}A\exp(i\delta)\begin{bmatrix}(\cos\beta-\sin\beta)\exp(i\chi)\\ (\cos\beta+\sin\beta)\exp(-i\chi)\end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

С другой стороны, параметры ($\beta$, $\chi$) эллипса поляризации волны выражаются через комплексные поляризационные коэффициенты $p_{x,\,y}\equiv E_y/E_x$; $p_{r,\,l}\equiv E_l/E_r$:

$$\mathrm{tg}\,2\chi=\frac{2\,\mathrm{Re}\,p_{x,\,y}}{1-|p_{x,\,y}|^2}; \tag{1.8}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\,\mathrm{Im}\,p_{x,y}}{1+|p_{x,y}|^2};$$

$$\chi = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,p_{r,l}; \tag{1.9}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{|p_{r,l}|-1}{|p_{r,l}|+1}.$$

При переходе между ПБ $\mathbf{e}_{x,y}$ и $\mathbf{e}_{1,2}$ матрица когерентности $\mathcal{J}$ и векторы $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ и $\mathbf{S}$ преобразуются следующим образом:

$$\mathcal{J}^{x,y} = F\mathcal{J}^{1,2}F^{-1}; \quad \mathcal{J}^{1,2} = F^{-1}\mathcal{J}^{x,y}F; \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}^{x,y} = (F \otimes F^*)\,\boldsymbol{\mathcal{J}}^{1,2}; \quad \boldsymbol{\mathcal{J}}^{1,2} = (F \otimes F^*)^{-1}\,\boldsymbol{\mathcal{J}}^{x,y}; \tag{1.11}$$

$$\mathbf{S}^{x,y} = L\mathbf{S}^{1,2}; \quad \mathbf{S}^{1,2} = L^{-1}\mathbf{S}^{x,y}, \tag{1.12}$$

где

$$L = A\,(F \otimes F^*)\,A^{-1} \tag{1.13}$$

— действительная ортогональная матрица ($L^+ = L^{-1}$).

Формулы (1.10—1.13) получаются подстановкой (1.3) в (1.1) с учетом унитарности матрицы $F$ и тождества [17]:

$$AB \otimes CD = (A \otimes C)\,(B \otimes D). \tag{1.14}$$

В частности, для переходов между $\mathbf{e}_{x,y}$ и $\mathbf{e}_{r,l}$, $\mathbf{e}_{x'y'}$, $\mathbf{e}_{1,2}$:

$$L^{r,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L^{x'y'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{1.15}$$

$$L^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\beta\cos 2\chi & -\sin 2\chi & \sin 2\beta\cos 2\chi \\ 0 & \cos 2\beta\sin 2\chi & \cos 2\chi & \sin 2\beta\sin 2\chi \\ 0 & -\sin 2\beta & 0 & \cos 2\beta \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

С помощью (1.1), (1.12) и (1.15) можно записать выражения для элементов обычных (т. е. декартовых) матрицы $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{xx}\mathcal{J}_{xy} \\ \mathcal{J}_{yx}\mathcal{J}_{yy} \end{bmatrix}$ и векторов $\boldsymbol{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{xx} \\ \mathcal{J}_{xy} \\ \mathcal{J}_{yx} \\ \mathcal{J}_{yy} \end{bmatrix}$;

$\mathbf{I} \equiv \mathbf{S}^{x,y} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{xx} = \widetilde{E_x E_x^*}; \quad \mathcal{J}_{yx} = \widetilde{E_y E_x^*}; \\ &\mathcal{J}_{xy} = \widetilde{E_x E_y^*}; \quad \mathcal{J}_{yy} = \widetilde{E_y E_y^*}; \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} I &= \widetilde{|E_x|^2} + \widetilde{|E_y|^2} = \widetilde{|E_{x'}|^2} + \widetilde{|E_{y'}|^2} = \widetilde{|E_r|^2} + \widetilde{|E_l|^2}; \\ Q &= \widetilde{|E_x|^2} - \widetilde{|E_y|^2} = -2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{E_{x'}E_{y'}^*} = 2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{E_r E_l^*}; \\ U &= 2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{E_x E_y^*} = \widetilde{|E_{x'}|^2} - \widetilde{|E_{y'}|^2} = 2\,\mathrm{Im}\,\widetilde{E_r E_l^*}; \\ V &= 2\mathrm{Im}\,\widetilde{E_x E_y^*} = -2\,\mathrm{Im}\,\widetilde{E_{x'}E_{y'}} = \widetilde{|E_r|^2} - \widetilde{|E_l|^2}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

В выражениях (1.18) компоненты $E_{x'}$, $E_{y'}$ отвечают углу $\alpha = \pi/4$.

Если вектор Стокса представить в виде суммы векторов полностью поляризованной ($\mathbf{S}_п$) и полностью неполяризованной ($\mathbf{S}_н$) составляющих ($\mathbf{S}_п = \{\sqrt{S_2^2 + S_3^2 + S_4^2},$

$S_2,\ S_3,\ S_4\}$;  $S_н = \{S_1 - \sqrt{S_2^2+S_3^2+S_4^2},\ 0,\ 0,\ 0\})$ и ввести степень поляризации излучения $P = \frac{S_{1п}}{S_1} = \frac{\sqrt{S_2^2+S_3^2+S_4^2}}{S_1}$, а для $\mathbf{S}_п$ воспользоваться выражениями (1.6) и (1.18), то можно записать:

$$\begin{aligned} I &= S_1 \\ Q &= PS_1 \cos 2\beta \cos 2\chi; \\ U &= PS_1 \cos 2\beta \sin 2\chi; \\ V &= -PS_1 \sin 2\beta, \end{aligned} \qquad (1.\ 19)$$

причем

$$\chi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{U}{Q}; \quad \beta = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{V}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}.$$

**1.2. Преобразование поляризационной системой состояния поляризации излучения.** Поляризационные свойства систем, изменяющих состояние поляризации излучения, можно описывать с помощью матриц Джонса и матриц Мюллера. Обобщенная комплексная $2\times2$-матрица Джонса по определению выражает закон преобразования обобщенного вектора Джонса полностью поляризованной плоской волны в следующем виде:

$$\mathbf{E}'_{1,2} = T\mathbf{E}_{1,2}, \qquad (1.\ 20)$$

где $\mathbf{E}_{1,2}$ и $\mathbf{E}'_{1,2}$ — векторы Джонса на входе и выходе системы.

В случае антенны элементами матрицы Джонса служат диаграммы направленности на основных и кроссполяризованных компонентах [1, 8], причем уравнение (1. 20) справедливо только для точечных источников. Если источник протяженный, то в (1. 20) произведения $T_{ij}E_j$ нужно заменить на интегралы антенного сглаживания [8].

При переходе к другому ПБ матрица Джонса изменяется в соответствии с преобразованием подобия:

$$\begin{aligned} T^{x,y} &= FTF^{-1}, \\ T &= F^{-1}T^{x,y}F. \end{aligned} \qquad (1.\ 21)$$

Подставляя (1. 20) в (1. 1), находим, что для недеполяризующей системы

$$\mathcal{J}' = T\mathcal{J}T^{+} \quad \text{(преобразование соединения)}; \qquad (1.\ 22)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}' = (T \otimes T^*)\, \boldsymbol{\mathcal{J}} = N\boldsymbol{\mathcal{J}}; \qquad (1.\ 23)$$

$$\mathbf{S}' = M\mathbf{S}, \qquad (1.\ 24)$$

где

$$M = ANA^{-1} = A\,(T \otimes T^*)\, A^{-1} \qquad (1.\ 25)$$

— матрица Мюллера системы.

В развернутом виде равенство (1. 24) эквивалентно системе из четырех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} S'_1 &= M_{11}S_1 + M_{12}S_2 + M_{13}S_3 + M_{14}S_4; \\ S'_2 &= M_{21}S_1 + M_{22}S_2 + M_{23}S_3 + M_{24}S_4; \\ S'_3 &= M_{31}S_1 + M_{32}S_2 + M_{33}S_3 + M_{34}S_4; \\ S'_4 &= M_{41}S_1 + M_{42}S_2 + M_{43}S_3 + M_{44}S_4. \end{aligned} \qquad (1.\ 26)$$

Как видно из (1. 26), элементы матрицы Мюллера характеризуют коэффициенты связи между входными и выходными параметрами Стокса. Например, в случае декартовой матрицы элементы $M_{21}$, $M_{31}$ описывают так называемую инструментальную линейную поляризацию (т. е. переходы интенсивности $I$ в параметры $Q$ и $U$), а $M_{41}$ — инструментальную круговую поляризацию (т. е. переход $I$ в $V$).

После соответствующих преобразований выражение (1. 25) для обобщенной матрицы Мюллера приобретает вид:

$$M = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \begin{array}{c}[(|T_{11}|^2 + |T_{22}|^2 + \\ + (|T_{21}|^2 + |T_{12}|^2)]\end{array} & \begin{array}{c}[(|T_{11}|^2 - |T_{22}|^2) + \\ + (|T_{21}|^2 - |T_{12}|^2)]\end{array} & 2\,\mathrm{Re}(T_{11}T^*_{12} + T_{21}T^*_{22}) & -2\,\mathrm{Im}(T_{11}T^*_{12} + T_{21}T^*_{22}) \\ \begin{array}{c}[(|T_{11}|^2 - |T_{22}|^2) - \\ - (|T_{21}|^2 - |T_{12}|^2)]\end{array} & \begin{array}{c}[(|T_{11}|^2 + |T_{22}|^2 - \\ - (|T_{21}|^2 + |T_{12}|^2)]\end{array} & 2\,\mathrm{Re}(T_{11}T^*_{12} - T_{21}T^*_{22}) & -2\,\mathrm{Im}(T_{11}T^*_{12} - T_{21}T^*_{22}) \\ 2\,\mathrm{Re}\,(T_{11}T^*_{21} + T_{12}T^*_{22}) & 2\,\mathrm{Re}\,(T_{11}T^*_{21} - T_{12}T^*_{22}) & 2\,\mathrm{Re}(T_{11}T^*_{22} + T_{12}T^*_{21}) & -2\,\mathrm{Im}(T_{11}T^*_{12} - T_{12}T^*_{21}) \\ 2\,\mathrm{Im}\,(T_{11}T^*_{21} + T_{12}T^*_{22}) & 2\,\mathrm{Im}\,(T_{11}T^*_{21} - T_{12}T^*_{22}) & 2\,\mathrm{Im}(T_{11}T^*_{22} + T_{12}T^*_{21}) & 2\,\mathrm{Re}(T_{11}T^*_{22} - T_{12}T^*_{21}) \end{bmatrix}. \tag{1. 27}$$

Таким образом, матрица Мюллера недеполяризующей системы однозначно связана с матрицей Джонса с помощью спинорного отображения (1. 25), (1. 27) [18]. Поэтому ее свойства определяются свойствами как матрицы $T$, так и спинорного отображения.

Перейдем к рассмотрению общих свойств матрицы $M$.

**2. Некоторые свойства матрицы Мюллера.**

1. Матрица Мюллера — действительная $4 \times 4$-матрица, т. е. $M^*_{ij} = M_{ij}$, что видно из (1. 27) [3, 4].

2. Матрица $M$ не содержит в себе информацию о фазе матрицы $T$, поэтому связь между матрицами $T$ и $M$ не взаимно однозначная. Каждые две матрицы $T$ и $\exp(i\delta)\ T$ дают одну и ту же матрицу $M$. Наоборот, из матрицы $M$ матрицу $T$ можно определить только с точностью до фазового множителя $\exp(i\delta)$ [9, 2].

3.
$$\det M = \det [A\,(T \otimes T^*)\,A^{-1}] = \det (T \otimes T^*) = |\det T|^4 \geqslant 0; \tag{2. 1}$$
$$\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\,[A\,(T \otimes T^*)\,A^{-1}] = \mathrm{Sp}\, T\, \mathrm{Sp}\, T^* = |\mathrm{Sp}\, T|^2 \geqslant 0. \tag{2. 2}$$

Как видно из (2. 1), (2. 2), (1. 21) и свойств преобразования подобия, $\det M$ и $\mathrm{Sp}\, M$ инвариантны относительно выбора ПБ.

4. Матрица $M$ недеполяризующей системы с точностью до нормировочного множителя $\Delta^2 = |\det T|^2 = (\det M)^{1/2}$ псевдоортогональная, т. е.

$$M^+ G M = \Delta^2 G; \tag{2. 3}$$
$$M G M^+ = \Delta^2 G, \tag{2. 4}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 5}$$

— фундаментальный метрический тензор четырехмерного действительного псевдоевклидового пространства Минковского.

Для доказательства справедливости (2. 3) и (2. 4) будем, следуя [2], рассматривать вектор Стокса $\mathbf{S}$ как времениподобный вектор в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского. Тогда для скалярного квадрата вектора Стокса $\mathbf{S}$ на входе поляризационной системы можно записать

$$|\mathbf{S}|^2 = \mathbf{S}^+ G \mathbf{S} = -S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = -4 \det \mathcal{J} \leqslant 0. \tag{2. 6}$$

После прохождения излучения через поляризационную систему выражение для скалярного квадрата вектора Стокса приобретает в соответствии с (1. 22) следующий вид [2]:

$$|\mathbf{S}'|^2 = -4 \det \mathcal{J}' = -4 \det (T \mathcal{J} T^+) = -4\,|\det T|^2 \det \mathcal{J} =$$
$$= |\det T|^2\, |\mathbf{S}|^2 = |\det T|^2\, \mathbf{S}^+ G \mathbf{S}. \tag{2. 7}$$

С другой стороны, согласно (1. 24),

$$|\mathbf{S}'|^2 = \mathbf{S}'^+ G \mathbf{S}' = (M\mathbf{S})^+ G\,(M\mathbf{S}) = \mathbf{S}^+ (M^+ G M)\,\mathbf{S}. \tag{2. 8}$$

Сравнивая (2. 8) и (2. 7), получаем соотношение (2. 3).

Выражение (2. 4) выводится из (2. 3) путем умножения последнего слева на $(M^+G)^{-1}$, а справа на $(GM^+)$ и использования тождеств

$$G^{-1}=G; \quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}; \quad A\alpha B=\alpha AB.$$

Из (2. 7) и (2. 1) видно, что совокупность матриц Мюллера, для которых $\det M=1$, образует собственную группу Лоренца [2, 18].

5. Из (1. 27) и свойства 2 следует, что из 16 действительных элементов матрицы $M$ независимы только 7 элементов. Таким образом, существует 9 независимых уравнений, связывающих между собой элементы матрицы $M$ [7—9]. Эти уравнения прямо следуют из свойства псевдоортогональности матрицы $M$. Раскрывая (2. 3), получим:

$$\begin{aligned} M_{11}^2-(M_{21}^2+M_{31}^2+M_{41}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{12}^2+(M_{22}^2+M_{32}^2+M_{42}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{13}^2+(M_{23}^2+M_{33}^2+M_{43}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{14}^2+(M_{24}^2+M_{34}^2+M_{44}^2)&=\Delta^2; \end{aligned} \tag{2. 9}$$

$$\begin{aligned} M_{11}M_{12}-(M_{21}M_{22}+M_{31}M_{32}+M_{41}M_{42})&=0;\\ M_{11}M_{13}-(M_{21}M_{23}+M_{31}M_{33}+M_{41}M_{43})&=0;\\ M_{11}M_{14}-(M_{21}M_{24}+M_{31}M_{34}+M_{41}M_{44})&=0;\\ M_{12}M_{13}-(M_{22}M_{23}+M_{32}M_{33}+M_{42}M_{43})&=0;\\ M_{12}M_{14}-(M_{22}M_{24}+M_{32}M_{34}+M_{42}M_{44})&=0;\\ M_{13}M_{14}-(M_{23}M_{24}+M_{33}M_{34}+M_{43}M_{44})&=0. \end{aligned} \tag{2. 10}$$

Равенства (2. 9)—(2. 10) после исключения $\Delta^2$ дают 9 независимых уравнений связи между элементами матрицы $M$.

Аналогично, раскрывая (2. 4), имеем:

$$\begin{aligned} M_{11}^2-(M_{12}^2+M_{13}^2+M_{14}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{21}^2+(M_{22}^2+M_{23}^2+M_{24}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{31}^2+(M_{32}^2+M_{33}^2+M_{34}^2)&=\Delta^2;\\ -M_{41}^2+(M_{42}^2+M_{43}^2+M_{44}^2)&=\Delta^2; \end{aligned} \tag{2. 11}$$

$$\begin{aligned} M_{11}M_{21}-(M_{12}M_{22}+M_{13}M_{23}+M_{14}M_{24})&=0;\\ M_{11}M_{31}-(M_{12}M_{32}+M_{13}M_{33}+M_{14}M_{34})&=0;\\ M_{11}M_{41}-(M_{12}M_{42}+M_{13}M_{43}+M_{14}M_{44})&=0;\\ M_{21}M_{31}-(M_{22}M_{32}+M_{23}M_{33}+M_{24}M_{34})&=0;\\ M_{21}M_{41}-(M_{22}M_{42}+M_{23}M_{43}+M_{24}M_{44})&=0;\\ M_{31}M_{41}-(M_{32}M_{42}+M_{33}M_{43}+M_{34}M_{44})&=0. \end{aligned} \tag{2. 12}$$

Равенства (2. 11)—(2. 12) после исключения $\Delta^2$ дают 9 других независимых уравнений связи [которые, конечно, не являются независимыми по отношению к (2. 9), (2. 10)].

Равенства (2. 9)—(2. 10) и (2. 11)—(2. 12) допускают простую интерпретацию: псевдоортогональность столбцов (строк) матрицы Мюллера, если рассматривать их как четырехвекторы пространства Минковского, каждый из которых нормирован на величину

$$\Delta=|\det T|=\{|T_{11}|^2|T_{22}|^2+|T_{21}|^2|T_{12}|^2-2\,\mathrm{Re}\,[(T_{11}T_{12}^*)(T_{22}T_{21}^*)]\}^{1/2}, \tag{2. 13}$$

являющуюся в общем случае функцией пространственных координат.

Как видно из (2. 9)—(2. 12), первая строка и первый столбец матрицы $M$, так же как и вектор Стокса, — времениподобные векторы пространства будущего в мире Минковского, а остальные строки и столбцы — пространственноподобные векторы.

Используя уравнения (2. 12), можно очень просто выразить элементы одного столбца матрицы через элементы трех других столбцов, например:

$$\begin{bmatrix} M_{14}\\ M_{24}\\ M_{34}\end{bmatrix}=\frac{1}{M_{44}}\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & -M_{13}\\ M_{21} & -M_{22} & -M_{23}\\ M_{31} & -M_{32} & -M_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{41}\\ M_{42}\\ M_{43}\end{bmatrix}; \tag{2. 14}$$

$$\begin{bmatrix} M_{13} \\ M_{23} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{33}} \begin{bmatrix} M_{11} - M_{12} - M_{14} \\ M_{21} - M_{22} - M_{24} \\ M_{41} - M_{42} - M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{31} \\ M_{32} \\ M_{34} \end{bmatrix}; \tag{2. 15}$$

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{32} \\ M_{42} \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{22}} \begin{bmatrix} M_{11} - M_{13} - M_{14} \\ M_{31} - M_{33} - M_{34} \\ M_{41} - M_{43} - M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{23} \\ M_{24} \end{bmatrix}, \tag{2. 16}$$

причем элементы $M_{22}$, $M_{33}$, $M_{44}$ вычисляются согласно равенствам (2. 11).

В работе [10] рассмотрен метод измерения всех элементов матрицы $M$ с помощью четырех и более источников с линейно независимыми векторами Стокса. Однако, при измерении элементов четвертого столбца матрицы Мюллера антенны сталкиваются с трудностью, связанной с отсутствием достаточно сильных и стабильных космических источников круговой поляризации радиоизлучения. Как видно из (2. 14), эту трудность можно преодолеть, вычисляя четвертый столбец с помощью первых трех столбцов, для измерения которых можно использовать три линейно поляризованных источника (один из которых может быть неполяризованным) и поляриметр, измеряющий все параметры Стокса.

Таким образом, для экспериментального определения полной матрицы Мюллера антенны достаточно трех (вместо четырех) калибровочных радиоисточников. При этом система уравнений относительно элементов матрицы $M$ оказывается избыточной, что позволяет увеличить точность их определения, используя метод наименьших квадратов [10]. Однако, несмотря на избыточность числа уравнений, такое количество источников ($N=3$) при отсутствии априорной информации об элементах матрицы Мюллера является и необходимым, поскольку при $N < 3$ можно измерить не более двух столбцов матрицы, что недостаточно для определения всей матрицы.

6. Если матрица $T$ не вырождена ($\det T \neq 0$), т. е. если исключить из рассмотрения идеальные поляризаторы (анализаторы, разделители ортогональных поляризаций), то существует обратная матрица $M^{-1}$, которая находится путем умножения (2. 3) справа на $M^{-1}$, а слева — на $1/\Delta^2 G$:

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta^2} GM^{+}G. \tag{2. 17}$$

Раскрывая (2. 17), имеем

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & -M_{31} & -M_{41} \\ -M_{12} & M_{22} & M_{32} & M_{42} \\ -M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{43} \\ -M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix}, \tag{2. 18}$$

т. е. обратную матрицу $M^{-1}$ очень просто получить из прямой матрицы $M$ путем транспонирования, умножения первой строки и первого столбца на минус единицу и умножения всех элементов на $\Delta^{-2}$ [причем $\Delta^2$ можно вычислить с помощью любого из равенств (2. 9) или (2. 11)].

Выражения (2. 18) целесообразно использовать для решения уравнения (1. 24) относительно входного вектора Стокса S при проведении анализа результатов поляризационных измерений частично поляризованных точечных источников.

7. Сравнивая (2. 18) с обычным выражением для элементов обратной матрицы [19]

$$M_{ij}^{-1} = (\det M)^{-1} (-1)^{i+j} D_{ji}$$

(где $D_{ij}$ — дополнительный минор элемента $M_{ij}$), находим, что все элементы $M_{ij}$ матрицы $M$ связаны со своими дополнительными минорами $D_{ij}$ следующим образом:

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^2}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & -D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & -D_{23} & D_{24} \\ -D_{31} & -D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & -D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}. \qquad (2.19)$$

8. С помощью (1. 27) можно убедиться в том, что любые два дополнительных $2\times2$-минора $M'_{2\times2}$ и $M''_{2\times2}$ с точностью до знака равны между собой:

$$M'_{2\times2}=(-1)^{k+l}\,M''_{2\times2}, \qquad (2.20)$$

где $k$ — индикатор наличия в миноре $M'_{2\times2}$ элементов третьего столбца матрицы $M$; $l$ — индикатор наличия элементов третьей строки ($k$, $l$ принимают значения 0 или 1).

Объединяя (2. 19) и (2. 20), можно записать формулу связи между двумя произвольными дополнительными минорами $M'$ и $M''$ матрицы $M$:

$$M'=(-1)^{k+l}\,\Delta^{2(m-2)}\,M'', \qquad (2.21)$$

где $m$ — порядок минора $M'\equiv M'_{m\times m}$ $(m=1,\ 2,\ 3)$; $\Delta=|\det\,T\,|=(\det M)^{1/2}$.

Перепишем (2. 20) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
&M_{11}M_{22}-M_{21}M_{12}=M_{33}M_{44}-M_{43}M_{34};\\
&M_{11}M_{23}-M_{21}M_{13}=M_{42}M_{34}-M_{32}M_{44};\\
&M_{11}M_{24}-M_{21}M_{14}=M_{32}M_{43}-M_{42}M_{33};\\
&M_{12}M_{23}-M_{22}M_{13}=M_{41}M_{34}-M_{31}M_{44};\\
&M_{12}M_{24}-M_{22}M_{14}=M_{31}M_{43}-M_{33}M_{41};\\
&M_{13}M_{24}-M_{23}M_{14}=M_{32}M_{41}-M_{31}M_{42};\\
&M_{11}M_{32}-M_{31}M_{12}=M_{43}M_{24}-M_{23}M_{44};\\
&M_{11}M_{33}-M_{31}M_{13}=M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24};\\
&M_{11}M_{34}-M_{31}M_{14}=M_{42}M_{23}-M_{22}M_{43};\\
&M_{12}M_{33}-M_{32}M_{13}=M_{21}M_{44}-M_{41}M_{24};\\
&M_{12}M_{34}-M_{32}M_{14}=M_{41}M_{23}-M_{21}M_{43};\\
&M_{13}M_{34}-M_{33}M_{14}=M_{21}M_{42}-M_{41}M_{22};\\
&M_{11}M_{42}-M_{41}M_{12}=M_{23}M_{34}-M_{33}M_{24};\\
&M_{11}M_{43}-M_{41}M_{13}=M_{32}M_{24}-M_{22}M_{34};\\
&M_{11}M_{44}-M_{41}M_{14}=M_{22}M_{33}-M_{32}M_{23};\\
&M_{12}M_{43}-M_{42}M_{13}=M_{31}M_{24}-M_{21}M_{34};\\
&M_{12}M_{44}-M_{42}M_{14}=M_{21}M_{33}-M_{31}M_{23};\\
&M_{13}M_{44}-M_{43}M_{14}=M_{31}M_{22}-M_{21}M_{32}.
\end{aligned} \qquad (2.22)$$

9. При переходе между ПБ $\mathbf{e}_{x,y}$ и $\mathbf{e}_{1,2}$ матрица Мюллера изменяется в соответствии с преобразованием подобия:

$$\begin{aligned} M^{x,y}&=LML^{-1};\\ M&=L^{-1}M^{x,y}L, \end{aligned} \qquad (2.23)$$

в чем легко убедиться, подставляя (1. 12) в (1.24) и приравнивая соответствующие члены или подставляя (1. 21) в (1. 25) и используя (1. 13), (1. 14) и тождество

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}. \qquad (2.24)$$

С помощью (2. 23) и (1. 15) находим связь декартовой матрицы $M^{x,y}$ с круговой $M^{r,l}$ и декартовой $M^{x',y'}$, которую временно обозначим через $M$:

$$M^{x,y}=\begin{bmatrix} M^{r,l}_{11} & M^{r,l}_{13} & M^{r,l}_{14} & M^{r,l}_{12} \\ M^{r,l}_{31} & M^{r,l}_{33} & M^{r,l}_{34} & M^{r,l}_{32} \\ M^{r,l}_{41} & M^{r,l}_{43} & M^{r,l}_{44} & M^{r,l}_{42} \\ M^{r,l}_{21} & M^{r,l}_{23} & M^{r,l}_{24} & M^{r,l}_{22} \end{bmatrix}; \qquad (2.25)$$

$$M^{x,y}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}\cos 2\alpha - M_{13}\sin 2\alpha & M_{12}\sin 2\alpha + M_{13}\cos 2\alpha & M_{14} \\ M_{21}\cos 2\alpha - M_{31}\sin 2\alpha & \frac{1}{2}[(M_{22}+M_{33})+(M_{22}-M_{33})\cos 4\alpha - (M_{32}+M_{23})\sin 4\alpha] & \frac{1}{2}[(M_{23}-M_{32})+(M_{23}+M_{32})\cos 4\alpha + (M_{22}-M_{33})\sin 4\alpha] & M_{24}\cos 2\alpha - M_{34}\sin 2\alpha \\ M_{21}\sin 2\alpha + M_{31}\cos 2\alpha & \frac{1}{2}[(M_{32}-M_{23})+(M_{32}+M_{23})\cos 4\alpha + (M_{22}-M_{33})\sin 4\alpha] & \frac{1}{2}[(M_{22}+M_{33})-(M_{22}-M_{33})\cos 4\alpha + (M_{32}+M_{23})\sin 4\alpha] & M_{24}\sin 2\alpha + M_{34}\cos 2\alpha \\ M_{41} & M_{42}\cos 2\alpha - M_{43}\sin 2\alpha & M_{42}\sin 2\alpha + M_{43}\cos 2\alpha & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

В частном случае, когда $\alpha=\pi/4$,

$$M^{x,y}=\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{13} & M_{12} & M_{14} \\ -M_{31} & M_{33} & -M_{32} & -M_{34} \\ M_{21} & -M_{23} & M_{22} & M_{24} \\ M_{41} & -M_{43} & M_{42} & M_{44} \end{bmatrix}.$$

10. При повороте поляризационной системы вокруг оси $z$ на угол $\alpha$ декартовая матрица Мюллера $M(\theta, \varphi)$ (где $\theta$, $\varphi$ — сферические угловые координаты, связанные с координатной системой $x$, $y$, $z$) преобразуется следующим образом:

$$M'(\theta, \varphi, \alpha)=R(-\alpha)\,M(\theta, \varphi-\alpha)\,R(\alpha), \quad (2.27)$$

где $R(\alpha)=(L^{x',y'})^{-1}$ — матрица поворота (1. 15). Эта формула, являющаяся обобщением известной аналогичной формулы для $M=\mathrm{const}$ [9, 4], сразу следует из (2. 23), если учесть, что после поворота системы на угол $\alpha$ матрица Мюллера, записанная в ПБ $\mathbf{e}_{x',y'}$, будет иметь вид $M(\theta, \varphi-\alpha)$.

11. Если матрица $T$ унитарная (эрмитова, нормальная), то и матрица $M$ унитарная (эрмитова, нормальная). Эти свойства следуют из (1. 25) и тождеств (1. 2), (1. 14), (1. 24).

12. Собственные векторы $\mathbf{S}^{ij}$ $(i, j=1, 2)$ и собственные значения $\lambda^{ij}$ матрицы $M$ связаны с собственными векторами $\mathbf{E}^i_{1,2}$ и собственными значениями $V_i$ матрицы $T$ следующими соотношениями [15, 17]:

$$\mathbf{S}^{ij}=A\mathcal{J}^{ij}=A\,(\mathbf{E}^i_{1,2}\otimes\mathbf{E}^{j*}_{1,2}); \quad (2.28)$$

$$\lambda_{ij}=V_iV_j^*, \quad (2.29)$$

причем поляризационные коэффициенты собственных векторов и собственные значения матрицы $T$ выражаются через ее элементы следующим образом [4]:

$$p_{1,2}=\frac{1}{2T_{1,2}}\{(T_{22}-T_{11})\pm[(T_{22}-T_{11})^2+4T_{12}T_{21}]^{1/2}\}; \quad (2.30)$$

$$V_{1,2}=\frac{1}{2}\{(T_{22}+T_{11})\pm[(T_{22}-T_{11})^2+4T_{12}T_{21}]^{1/2}\}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,T\left\{1\pm\left[1-\frac{4\det T}{(\mathrm{Sp}\,T)^2}\right]^{1/2}\right\}. \quad (2.31)$$

Как видно из (2. 28), (2. 29), реальным полям отвечают собственные векторы $\mathbf{S}^{ii}$ $(i=1.2)$ с действительными положительными собственными значениями $\lambda_{ii}$ $|V_i|^2$, имеющими физический смысл коэффициентов пропускания интенсивности соответствующих собственных волн [15].

13. Если матрица $T$ нормальная, то в собственном ПБ, определяемом выражением (2. 30), матрица $M$ квазидиагональна:

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} |V_1|^2+|V_2|^2 & |V_1|^2-|V_2|^2 & 0 & 0 \\ |V_1|^2-|V_2|^2 & |V_1|^2+|V_2|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{Re}\, V_1V_2^* & -2\mathrm{Im}\, V_1V_2^* \\ 0 & 0 & 2\mathrm{Im}\, V_1V_2^* & 2\mathrm{Re}\, V_1V_2^* \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 & 0 & 0 \\ \hat{S}_2 & \hat{S}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_3 & -\hat{S}_4 \\ 0 & 0 & \hat{S}_4 & \hat{S}_3 \end{bmatrix},$$

где вектор $\hat{\mathbf{S}} \equiv \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4\} = A(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2^*)$, а $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$.

14. Пусть $T = T_1T_2 \ldots T_n$, тогда, используя (1.25) и (1.14), можно показать, что и

$$M = M_1M_2 \ldots M_n,$$

причем $M_i$ определяется по формулам (1.25). Отсюда видно, что для невзаимодействующих последовательно расположенных систем их матрицы Мюллера перемножаются.

15. Пусть $T_\Sigma = T + t$; тогда из (1.27) следует, что

$$M_\Sigma = M + m + \delta M,$$

где $M$ и $m$ вычисляются в соответствии с (1.25), а $\delta M$ — по формулам:

$$\begin{aligned}
\delta M_{11} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{11}^* + T_{22}t_{22}^*) + (T_{12}t_{12}^* + T_{21}t_{21}^*)];\\
\delta M_{22} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{11}^* + T_{22}t_{22}^*) - (T_{12}t_{12}^* + T_{21}t_{21}^*)];\\
\delta M_{33} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{22}^* + T_{22}t_{11}^*) + (T_{12}t_{21}^* + T_{21}t_{12}^*)];\\
\delta M_{44} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{22}^* + T_{22}t_{11}^*) - (T_{12}t_{21}^* + T_{21}t_{12}^*)];\\
\delta M_{12} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{11}^* - T_{22}t_{22}^*) + (T_{21}t_{21}^* - T_{12}t_{12}^*)];\\
\delta M_{21} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{11}^* - T_{22}t_{22}^*) - (T_{21}t_{21}^* - T_{12}t_{12}^*)];\\
\delta M_{13} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{12}^* + T_{12}t_{11}^*) + (T_{21}t_{22}^* + T_{22}t_{21}^*)];\\
\delta M_{31} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{21}^* + T_{21}t_{11}^*) + (T_{12}t_{22}^* + T_{22}t_{12}^*)];\\
\delta M_{14} &= -\mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{12}^* - T_{12}t_{11}^*) + (T_{21}t_{22}^* - T_{22}t_{21}^*)];\\
\delta M_{41} &= \mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{21}^* - T_{21}t_{11}^*) + (T_{12}t_{22}^* - T_{22}t_{21}^*)];\\
\delta M_{23} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{12}^* + T_{12}t_{11}^*) - (T_{21}t_{22}^* + T_{22}t_{21}^*)];\\
\delta M_{32} &= \mathrm{Re}\,[(T_{11}t_{21}^* + T_{21}t_{11}^*) - (T_{12}t_{22}^* + T_{22}t_{12}^*)];\\
\delta M_{24} &= -\mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{12}^* - T_{12}t_{11}^*) - (T_{21}t_{22}^* - T_{22}t_{21}^*)];\\
\delta M_{42} &= \mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{21}^* - T_{21}t_{11}^*) - (T_{12}t_{22}^* - T_{22}t_{12}^*)];\\
\delta M_{34} &= -\mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{22}^* - T_{22}t_{11}^*) - (T_{12}t_{21}^* - T_{21}t_{12}^*)];\\
\delta M_{43} &= \mathrm{Im}\,[(T_{11}t_{22}^* - T_{22}t_{11}^*) + (T_{12}t_{21}^* - T_{21}t_{12}^*)].
\end{aligned}$$

16. Произвольную невырожденную матрицу $M$, элементы которой постоянные числа, можно однозначно представить в виде произведения унитарной $M_{\mathrm{U}}$ и положительно определенной эрмитовой $M_{\mathrm{H}}$ матриц [2]:

$$M = M_{\mathrm{U}}M_{\mathrm{H1}} = M_{\mathrm{H2}}M_{\mathrm{U}},$$

что следует из свойства полярного разложения матриц [19].

В последнем разложении

$$M_{\mathrm{U}} = F_2F_1^*; \quad M_{\mathrm{H1}} = F_1DF_1^+, \quad M_{\mathrm{H2}} = F_2DF_2^+,$$

где $F_1$ и $F_2$ — матрицы, составленные из собственных векторов матриц $G_1 = M^+M$ и $G_2 = MM^+$; $D = \mathrm{diag}\,(\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, \varkappa_3^2, \varkappa_4^2)$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матриц $G_1$ и $G_2$.

Таким образом, произвольный СВЧ поляризационный тракт, не содержащий идеальных поляризаторов (анализаторов, разделителей ортогональных поляризаций), можно однозначно представить в виде последовательного соединения компенсатора (с матрицей $M_U$) и частичного поляризатора (с матрицей $M_{H1}$ или $M_{H2}$), имеющих в общем случае разные собственные ПБ.

17. Что касается матрицы $L$ [см. (1. 13)], то она одновременно ортогональна ($L^+EL=E$, $E$ — единичная матрица) и псевдоортогональна ($L^+GL=G$). Отсюда следует ее квазидиагональность:

$$L=\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & L_3 \end{array}\right],$$

где $L_3^+=L_3^{-1}$ — ортогональная матрица вращения трехмерного пространства [18, 19].

3. **Геометрическая интерпретация воздействия поляризационных систем на состояние поляризации излучения.** Будем рассматривать вектор Стокса $\mathrm{S}$ как четырехвектор действительного псевдоевклидового пространства Минковского [2]. В псевдоевклидовом пространстве скалярное произведение векторов в случае ортонормированного базиса выражается соотношением [20, 21]

$$(\mathrm{xy})=(\mathrm{yx})=\mathrm{x}^+G\mathrm{y}=\mathrm{y}^+G\mathrm{x}, \tag{3. 1}$$

где

$$G=[G_{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— фундаментальный метрический тензор псевдоевклидового пространства.

Введем ортонормированный базис $\mathrm{s}_1$, $\mathrm{s}_2$, $\mathrm{s}_3$, $\mathrm{s}_4$ и запишем в нем обобщенный вектор Стокса:

$$\mathrm{S}=\sum_{i=1}^{4} S_i\mathrm{s}_i. \tag{3. 2}$$

В силу ортонормированности базисные орты удовлетворяют условию

$$\mathrm{s}_i^+G\mathrm{s}_j=G_{ij}, \tag{3. 3}$$

$$S_i=\sum_{j=1}^{4} G_{ij}(\mathrm{S}\mathrm{s}_j)=\sum_{j=1}^{4} G_{ij}\mathrm{S}^+G\mathrm{s}_j. \tag{3. 4}$$

После прохождения излучения через поляризационную систему вектор Стокса изменяется в соответствии с (1. 24) и (3. 2) следующим образом:

$$\mathrm{S}'=M\mathrm{S}=\sum_{i=1}^{4} S_iM\mathrm{s}_i=\Delta\sum_{i=1}^{4} S_i\mathrm{s}_i', \tag{3. 5}$$

где $\mathrm{s}_i'=\frac{1}{\Delta}M\mathrm{s}_i$ — некоторый новый ортонормированный базис, поскольку матрица $\frac{1}{\Delta}M$, согласно (2. 3), псевдоортогональна.

Как видно из сравнения (3. 5) и (3. 2), воздействие поляризационной системы на состояние поляризации излучения эквивалентно вращению псевдоевклидового пространства вокруг начала координат и изменению масштаба вдоль всех осей в $\Delta=|\det T|=(\det M)^{1/2}$ раз («активная» точка зрения [19]).

Найдем выражение для новых координат $S_i'$ вектора Стокса, записанных в старом (неподвижном) базисе $\mathrm{s}_i$. После умножения разложения

$$\mathrm{S}'=\sum_{i=1}^{4} S_i'\mathrm{s}_i \tag{3. 6}$$

на $\mathrm{s}_j^+G$ слева с учетом (3. 3) получим

$$\mathrm{s}_j^+G\mathrm{S}'=\sum_{i=1}^{4} S_i'\mathrm{s}_j^+G\mathrm{s}_j=\sum_{i=1}^{4} G_{ij}S_i'.$$

Принимая во внимание (3. 1) и (1. 24), имеем

$$\sum_{i=1}^{4} G_{ij} S'_i = \mathrm{S}'^{+} G \mathrm{s}_j = \mathrm{S}^{+} M^{+} G \mathrm{s}_j = \mathrm{S}^{+} G \mathrm{s}''_j,$$

т. е.

$$S'_i = \sum_{j=1}^{4} G_{ij} \mathrm{S}^{+} + G \mathrm{s}''_j, \tag{3. 7}$$

где

$$\mathrm{s}''_j \equiv G M^{+} G \mathrm{s}_j = \Delta^2 M^{-1} \mathrm{s}_j \tag{3. 8}$$

— ортогональный (но не нормированный) базис, удовлетворяющий условию

$$\mathrm{s}''_j G \mathrm{s}''_j = \Delta^2 G_{ij} \tag{3. 9}$$

Из равенства (3. 7) видно, что воздействие поляризационной системы на параметры Стокса эквивалентно вращению (3. 8) ортогонального базиса (с изменением длин ортов) при неподвижном векторе Стокса («пассивная» точка зрения [19]).

Таким образом, состояние поляризации частично поляризованного излучения можно в определенном смысле рассматривать как «геометрический объект» в псевдоевклидовом четырехмерном пространстве Минковского [20]. В случае точечного источника воздействие поляризационной системы на объект сводится к перемещению (вращению) последнего как целого и изменению всех его размеров в одинаковое число раз.

Здесь можно провести аналогию между воздействием поляризационной системы на состояние поляризации излучения и переходом к другой инерциальной системе отсчета в специальной теории относительности.

С другой стороны, движение точек, описывающих частично поляризованное излучение, по четырехмерной сфере пространства Минковского является обобщением движения точек по сфере Пуанкаре в случае полностью поляризованного излучения [9].

**Заключение.** В работе рассмотрены общие свойства матрицы Мюллера недеполяризующей системы, которые могут найти применение в теории и практике поляризационных измерений. Показано, что одним из замечательных свойств матрицы Мюллера является псевдоортогональность (с точностью до нормировочного коэффициента). Это приводит к ряду важных следствий.

1. Для измерения элементов матрицы Мюллера достаточно использования лишь линейно поляризованных источников. Это важно для исследования поляризационных характеристик антенн радиоастрономическими методами, поскольку степень круговой поляризации стабильных дискретных радиоисточников очень мала.

2. Минимальное количество калибровочных источников, необходимых для полного экспериментального определения матрицы Мюллера системы при отсутствии о ней априорной информации, равно трем. Однако если априорная информация об элементах матрицы Мюллера имеется, например, благодаря некоторым свойствам симметрии конструкции системы, то необходимое число калибровочных источников может быть меньше трех.

3. Существенно упрощается вычисление обратной матрицы, которая получается из прямой путем транспонирования, умножения первой строки и первого столбца на минус единицу и умножения всех элементов на один и тот же множитель.

4. Воздействие системы на состояние поляризации излучения допускает наглядную геометрическую интерпретацию — вращение вектора Стокса в четырехмерном пространстве Минковского. Это позволяет проводить глубокие физические аналогии со специальной теорией относительности, а также обобщить метод сферы Пуанкаре на случай частично поляризованного излучения.

В заключение выражаю благодарность Ю. Н. Парийскому, Д. В. Королькову, И. Ф. Белову, Н. С. Соболевой за полезное обсуждение статьи и ценные замечания.

## Литература


1. Есепкина Н. А. Поляризационные характеристики антенн радиотелескопов. — Радиофизика, 1971, **14**, № 5, с. 673.
2. Thiel M. A. F. Darstellungs- und Transformationstheorie quasi-monochromatistheocher Strahlungsfelder. — Beitrage zur Radioastronomie, 1970, **1** (5), S. 145.
3. О' Нейл Э. Введение в статистическую оптику. М.: Мир, 1966.
4. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 583 с.
5. Определение поляризационных характеристик Большого пулковского радиотелескопа / Н. А. Есепкина, Н. С. Бахвалов, Л. Г. Васильева и др. — Радиофизика, 1973, **16**, № 5, с. 669.
6. Поляризационные характеристики радиотелескопа РАТАН-600 / Н. А. Есепкина, Н. С. Бахвалов, Б. А. Васильев и др. — Астрофиз. исслед. (Изв. САО), 1979, **11**, с. 182.
7. Ван де Хюлст М. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961.
8. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. М.: Наука, 1973.
9. Шерклифф У. Поляризованный свет. М., 1965.
10. Thiel M. A. F. Error calculation of polarization measurments. — J. Opt. Soc. Amer., 1976, **66**, N 1, p. 65.
11. Коржавин А. Н. К теории радиоастрономических поляризационных измерений. — Астрофиз. исслед. (Изв. САО), 1979, **11**, с. 145.
12. Исследование линейной поляризации радиоизлучения нескольких космических радиоисточников на волне 13 см с радиотелескопом РАТАН-600 / В. И. Абрамов, И. Ф. Белов, Е. Н. Виняйкин, В. А. Разин. Препринт НИРФИ № 158. Горький, 1983.
13. Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
14. Parrent G. B., Roman P. On matrix formulation of the theory of partial polarization in terms of observables. — Nuovo cimento, 1960, **15**, p. 370.
15. Marathay A. S. Operator formalism in theory of partial polarisation. — J. Opt. Soc. Amer., 1965, 55, N 8, p. 969.
16. Канарейкин Д. Б., Павлов Н. Ф., Потехин В. А. Поляризация радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1966.
17. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.
18. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., 1958.
19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
20. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
21. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.


Поступила в редакцию 31 марта 1983 г.