ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ РАДИОТЕЛЕСКОПА В ОТНОШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Д. В. Корольков, П. А. Фридман

При проектировании радиоастрономических систем возникает необходимость количественно учесть влияние основных технических параметров на работу системы в целом. Сделана попытка, используя метод Шеннона в теории связи, оценить пропускную способность радиотелескопа в отношении пространственной информации. Для этого в качестве сигнала выбирается радиоизлучение фона неразрешенных дискретных источников, рассматриваемое как случайный процесс с равномерным пространственным спектром (дисперсия этого процесса известна из наблюдательных данных), в качестве шума — собственные тепловые шумы на входе радиометра. Для иллюстрации метода рассчитаны зависимости пропускной способности различных радиотелескопов от флуктуационной чувствительности радиометра на разных длинах волн. Анализ кривых позволяет сделать выводы о степени связи информативности радиотелескопа с площадью и геометрией антенны и чувствительностью приемника.

When designing radioastronomical systems it is necessary to make quantitative allowance for the influence of basic technical parameters on the operation of a system as a whole. An attempt is made, using the Shannon method in the theory of communication, to estimate a transmissive power of a radio telescope with respect to the spatial information (informative efficiency of a radio telescope). For this purpose we take as a signal the background radio emission from unresolved discrete sources which is treated as a random process with a uniform spatial spectrum (the dispersion of this process is known from observational data) and as a noise the input thermal noise of the radiometer system. In order to illustrate the method, dependences of transmissive power of various radio telescopes on the fluctuation sensitivity of a radiometer at different wavelengths are calculated. An analysis of the curves makes it possible to conclude in what degree the informative efficiency of a radio telescope depends on the area and geometry of the antenna, and on the receiver sensitivity.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие антенной и радиоприемной техники СВЧ за последнее время обусловило значительный прогресс в практике радиоастрономических исследований. Однако каждый следующий шаг на пути увеличения наблюдательной информации, даваемой инструментом, связан с быстро растущими техническими и материальными трудностями. В связи с этим представляется целесообразной попытка найти общий подход к оценке зависимости количества информации, получаемой радиотелескопом, от основных параметров системы.

Измеряемыми величинами в радиоастрономии являются пространственный и временной спектры радиоизлучения и его поляризационные характеристики. В силу того что измеряемые величины описываются как случайные процессы, наблюдаемые на фоне случайных помех (шумов), измерение их представляет собой статистическую процедуру; извлечение информации при этом связано с нахождением корреляционных зависимостей в пространстве той или иной физической величины. Количество

информации, содержащееся в сигнале, естественно поэтому измерять как его энтропию, а принимающую систему оценивать с точки зрения ее пропускной способности по Шеннону.

Обычно временной спектр и поляризация исследуются в зависимости от пространственных (угловых) координат, поэтому в дальнейшем изложении будет обсуждаться пропускная способность радиотелескопа для пространственной информации.

Рассмотрим канал, по которому проходит пространственная информация от объекта до регистрирующего устройства (рис. 1). В канале действуют различного типа помехи, возникающие в разных частях тракта. Аддитивный тепловой шум на входе приемника, как известно, определяет пороговую чувствительность приемника. Мультипликативная помеха

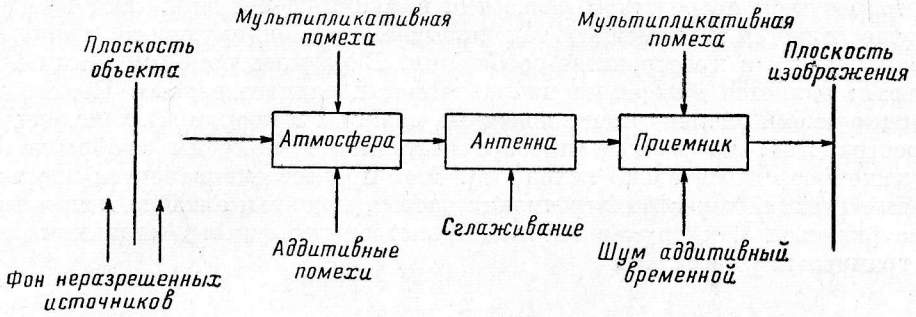

Рис. 1.

в приемнике (флуктуации усиления) может значительно ухудшить его теоретическую чувствительность, и поэтому с нею борются все разработчики радиометров.

Влияние помех, связанных с флуктуациями радиоизлучения атмосферы и фона неразрешенных метагалактических источников, на измерения отдельных дискретных источников рассмотрено в работе [1]. В настоящей работе мы изменим подход и будем считать распределение яркости в плоскости объекта, включая фон неразрешенных источников, сигналом, так как по существу нас должны интересовать не только отдельные источники, но и общая картина радиояркости неба с возможно большим числом подробностей. Распределение яркостной температуры в зависимости от координат на небесной сфере $T(x, y)$ представляет собой двумерную случайную функцию, распределение которой мы будем считать гауссовым. При таком подходе отдельные яркие источники можно, по-видимому, трактовать как выбросы случайного процесса, возникающие с малой вероятностью.

Оценим пропускную способность упрощенной системы, состоящей из объекта наблюдения, антенны и приемника, в присутствии аддитивных помех — собственных шумов приемного устройства. К этому случаю можно попытаться применить формулу Шеннона для пропускной способности канала связи с шумом, которая определяет предельную пропускную способность канала, когда и сигнал, и шум представляют собой независимые случайные функции с гауссовым распределением вероятностей и дисперсиями σ_c^2 и $\sigma_ш^2$ [2]. Сигнал такого типа обладает максимальной энтропией, и при одинаковом равномерном спектре сигнала и шума пропускная способность в двоичных единицах в единицу времени равна

$$I = \Delta F \log_2\left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma_ш^2}\right), \tag{1}$$

где ΔF — полоса частот, пропускаемых каналом.

§ 1. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ РАДИОТЕЛЕСКОПА ПО ШЕННОНУ И ПАРАМЕТРЫ СИГНАЛА

Ограничиваясь кругом радиоастрономических задач, связанных с изучением неизменных во времени или сравнительно медленно меняющихся распределений яркости, примем, что истинное распределение яркости «читается» радиотелескопом при движении диаграммы направленности антенны относительно небесной сферы, например за счет вращения Земли. При этом происходит преобразование сигнала, напоминающее процесс развертки, используемый в различных областях техники связи (телевидении, радиолокации). Общим для всех этих случаев является следующее: сообщение, представляющее собой функцию пространственных координат, преобразуется посредством развертки в функцию времени. Этот процесс осуществляется с помощью так называемого зондирующего элемента, движущегося в пространстве сообщения. В радиоастрономии таким элементом является диаграмма направленности радиотелескопа. Поскольку зондирующий элемент имеет конечные размеры в координатах исходного пространства, на выходе преобразователя мы получим изображение, сглаженное относительно исходного. Этот процесс эквивалентен прохождению сигнала через фильтр низких частот, при этом антенна может рассматриваться как двумерный пространственный фильтр низких частот с граничными частотами

$$u_{\text{гр}} = \frac{D_x}{\lambda} \text{ и } v_{\text{гр}} = \frac{D_y}{\lambda},$$

где D_x и D_y — линейные размеры апертуры антенны, λ — рабочая длина волны. Так как спектр изображения в результате прохождения через фильтр ограничен, изображение, в соответствии с теоремой Котельникова, может быть полностью описано с помощью конечного числа отсчетов

$$W = (2u_{\text{гр}} + 1)(2v_{\text{гр}} + 1) = \left(\frac{2D_x}{\lambda} + 1\right)\left(\frac{2D_y}{\lambda} + 1\right). \tag{2}$$

Отсчеты функции $T(x, y)$, взятые на расстоянии $\frac{\lambda}{2D}$ (собственный интервал антенны), будут независимыми. W — это в нашем случае число элементов, на которые разложена единичная площадка в плоскости сигнала.

Применяя подход Шеннона и понимая под пропускной способностью радиотелескопа количество информации, считываемой с единицы телесного угла (назовем ее пространственной информативностью I), можем записать

$$I = \frac{1}{2} W \log_2\left(1 + \frac{\overline{\delta T_c^2}}{\Delta T_{\text{ш}}}\right), \tag{3}$$

где δT_c — стандартное отклонение сигнала на выходе антенны, $\Delta T_{\text{ш}}$ — чувствительность приемного устройства (стандартное отклонение собственных шумов).

При определении величины I мы не учитываем времени, необходимого для получения изображения, так как это время приблизительно одинаково для разных систем с эквивалентным разрешением и, кроме того, в большинстве задач решающее значение имеет именно пространственная информация независимо от времени, за которое она получена.

Определим теперь величины δT_c и $\Delta T_ш$. Пространственная спектральная плотность яркостной температуры является Фурье-преобразованием истинного распределения яркости $T(x, y)$

$$\bar{T}_\lambda(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x, y)\, e^{-i(ux+vy)}\, dxdy.$$

Здесь индекс λ означает, что рассмотрение касается конкретной длины волны λ. Спектр изображения (т. е. сглаженного антенной распределения радиояркости) определяется известным соотношением

$$\bar{T}_{из}(u, v) = \bar{T}_\lambda(u, v) \cdot \bar{A}(u, v),$$

где $\bar{A}(u, v)$ — пространственная частотная характеристика антенны. Флуктуации температуры в плоскости изображения обладают дисперсией

$$\overline{\delta T^2_{из}} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |\bar{T}_{из}(u, v)|^2\, du\, dv. \qquad (4)$$

Если предположить для простоты, что частотная характеристика антенны является прямоугольной

$$\bar{A}(u, v) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant u, v \leqslant u_{гр}, v_{гр}, \\ 0 \text{ при } u, v > u_{гр}, v_{гр}, \end{cases}$$

а $\bar{T}_\lambda = \text{const}$, то

$$\overline{\delta T^2_{из}} = \int_0^{u_{гр}}\int_0^{v_{гр}} |\bar{T}_{из}(u, v)|^2\, du\, dv = |\bar{T}_\lambda|^2 u_{гр} v_{гр}, \qquad (5)$$

а стандартное отклонение яркостной температуры в изображении

$$\delta T_{из} = \bar{T}_\lambda \sqrt{u_{гр} v_{гр}}. \qquad (6)$$

Предположение $\bar{T}_\lambda = \text{const}$ можно обосновать тем, что во всех проводившихся до настоящего времени наблюдениях, включая наблюдения с интерферометрами со сверхдлинными базами, остается значительный процент неразрешенных источников, пространственный спектр которых простирается далее любой мыслимой для инструмента на Земле граничной частоты $u_{гр}$ и $v_{гр}$. Это, безусловно, недостаточно веское обоснование, но мы исходим из него, учитывая оценочный характер всех расчетов.

Стандартное отклонение антенной температуры на выходе радиотелескопа — сигнал δT_c — будет равно $\delta T_{из}$ только в случае, когда телесный угол диаграммы антенны Ω и ее собирающая поверхность S связаны соотношением $\Omega = \frac{\lambda^2}{S}$. В общем случае необходимо ввести так называемый коэффициент заполнения апертуры (или избыточного разрешения [5])

$$\eta = \frac{D_x D_y}{S}.$$

Для антенн со сплошной апертурой $\eta = 1$, для антенн апертурного синтеза этот коэффициент может быть много больше единицы. В этом общем случае выражение для сигнала надо записать с учетом η

$$\delta T_c = \frac{1}{\eta} \bar{T}_\lambda \sqrt{u_{гр} v_{гр}}. \qquad (7)$$

Причина уменьшения $\delta\bar{T}_c$ в системах апертурного синтеза, по сравнению с системой со сплошной апертурой, заключается в том, что в этих системах уменьшаются размеры зондирующего элемента ввиду увеличения линейных размеров апертуры при сохранении неизменной площади S.

При определении $\Delta T_ш$ необходимо учесть, что постоянная времени τ выходного фильтра радиотелескопа должна быть согласована с диаграммой антенны. Другими словами, ширина полосы по низкой частоте $\Delta F = 1/4\tau$ связана с граничной частотой антенны радиотелескопа $u_{гр}$ соотношением

$$\Delta F = u_{гр}\omega, \tag{8}$$

где ω — скорость движения диаграммы за счет вращения Земли.* Чувствительность радиометра при температуре входных шумов $T_ш$ и при полосе принимаемых частот Δf равна (постоянный множитель опущен)

$$\Delta T_ш = T_ш \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f}} = \frac{T_ш}{\sqrt{\Delta f}} \sqrt{u_{гр}\omega}. \tag{9}$$

Проводя повторные наблюдения и осредняя n результатов, получим выигрыш в $\sqrt{n}$ раз, т. е.

$$\Delta T_ш = \frac{T_ш \sqrt{u_{гр}\omega}}{\sqrt{\Delta f n}} = \Delta T_0 \sqrt{u_{гр}\omega}. \tag{9а}$$

Используя (7), (8), (9) и (2), запишем окончательное выражение для информативности радиотелескопа в двоичных единицах на единицу телесного угла

$$I = \frac{1}{2} W \log_2 \left[1 + \left(\frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{v_{гр}}{\omega}} \cdot \frac{\bar{T}_\lambda}{\Delta T_0} \right)^2 \right] =$$

$$= 2 \frac{D_x D_y}{\lambda^2} \log_2 \left[1 + \left(\frac{S_{эфф}}{D_x D_y} \sqrt{\frac{D_y}{\omega\lambda}} \cdot \frac{\bar{T}_\lambda}{\Delta T_0} \right)^2 \right]. \tag{10}$$

Здесь $S_{эфф}$ — эффективная собирающая поверхность радиотелескопа, D_x, D_y — максимальные линейные размеры системы, λ — длина волны, ΔT_0 — флуктуационная чувствительность радиометра в расчете на $\tau = 1$ сек. (с учетом n осреднений), $\bar{T}_\lambda$ — пространственная спектральная плотность яркостной температуры неба на волне λ, ω — угловая скорость вращения Земли.

Для антенн апертурного синтеза $S_{эфф}$ непосредственно с линейными размерами синтезированной апертуры не связана. При параллельном синтезе (крест Миллса) $S_{эфф}$ равна площади антенн, участвующих в синтезе. Для оценки отношения сигнала к шуму при последовательном апертурном синтезе (метод Райла) удобно сравнивать чувствительность этого метода с чувствительностью, получаемой при обзоре сплошной антенной с такой же разрешающей способностью, как и у синтезируемой [3]. Для случая равномерного облучения обеих апертур — синтезируемой и сплошной — и при одинаковой скорости обзора, определяемой вращением Земли, отношение сигнала к шуму при двумерном синтезе будет в 1.23 d/D меньше, чем при наблюдении со сплошной антенной (d — диаметр малых антенн, используемых при синтезе, D — диаметр синтезируемой апертуры).

Таким образом, все параметры в формуле (10) определены, за исключением пространственной спектральной плотности яркостной температуры $\bar{T}_\lambda$. Исходя из определения яркостной температуры, можно записать

$$\frac{2kT_я}{\lambda^2} \frac{\sum\limits_{\Omega} p_i}{\Omega},$$

* Ниже при численных оценках принято $\omega = 0.72 \cdot 10^{-4}$ рад./сек.

где p_i — плотность потока i-го дискретного источника, Ω — некоторая элементарная площадка (телесный угол).

Если, как считается в настоящее время, можно принять $p_i \sim \lambda$, то $T_л \sim \lambda^3$. Именно такую зависимость $\bar{T}_\lambda$ от длины волны мы и примем для оценок (рис. 2). Для абсолютной привязки воспользуемся наблюдениями флуктуаций метагалактического фона [4] на волне 21 см (рис. 3). Эти наблюдения проведены с помощью радиотелескопа университета штата Огайо (США) с параметрами $D_x=80$ м, $D_y=21$ м, $\Delta T_0=0.06°$K. На рис. 3 показаны три кривые прохождения одной и той же области неба с разной чувствительностью: *а* соответствует $\tau=10$ сек., *б* — осреднение четырех записей с $\tau=10$ сек., *в* — осреднение четырех записей с $\tau=30$ сек.

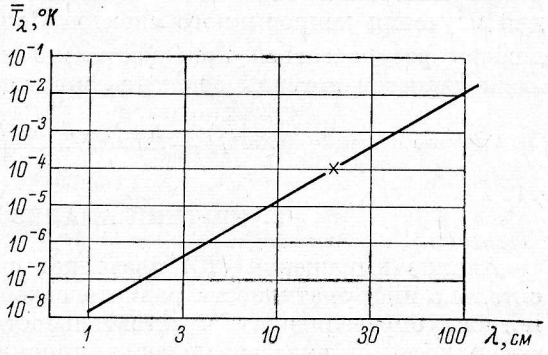

Рис. 2.

На последней кривой аппаратурные шумы малы, и можно оценить величину $\delta T_c \cong 0.02°$K; так как параметры телескопа $u_{гр}$, $v_{гр}$ и $\eta=1$ известны, по формуле (7) находим $\bar{T}_{21} \approx 10^{-4}$°K; на рис. 2 эта точка отмечена крестиком.

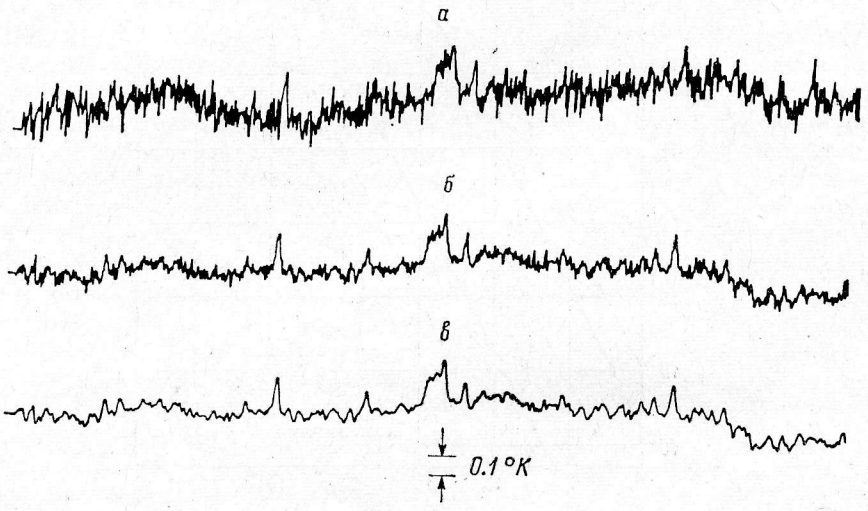

Рис. 3.

До сих пор речь шла о радиотелескопе с одним каналом приема на волне λ. Так как I является функцией λ, интегральная информативность радиотелескопа должна быть получена интегрированием $I(\lambda)$ по λ, если же учесть еще полный анализ поляризации (четыре параметра), то последнюю величину надо учетверить и мы получим максимальную величину I для данного инструмента.

В реальных системах, если на радиотелескопе работает одновременно N приемников,

$$I_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} I_i(\lambda_i).$$

Число каналов зависит от диапазона частот, в котором работает антенна, и от интервала между центральными частотами отдельных каналов. Последний зависит от задачи или от класса наблюдаемых объектов. Для некоторых классов объектов в настоящее время известен характер хода непрерывного спектра, руководствуясь которым можно выбрать N так, чтобы измерения отдельных каналов были независимыми. Например, для изучения непрерывного спектра Солнца и квазаров соседние точки должны располагаться приблизительно через пол-октавы $f_{i+1}/f_i = a = \sqrt{2}$. Если диапазон антенны заключен в пределах $f_{\max}$ и $f_{\min}$, то

$$N = \frac{\log f_{\max} - \log f_{\min}}{\log a} + 1.$$

§ 2. КРАТКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ выражения (10) позволяет сделать некоторые выводы относительно информативности радиотелескопа. Величина I зависит от параметров, определяющих чувствительность радиотелескопа (собирающей поверхности и чувствительности приемного устройства), и параметра,

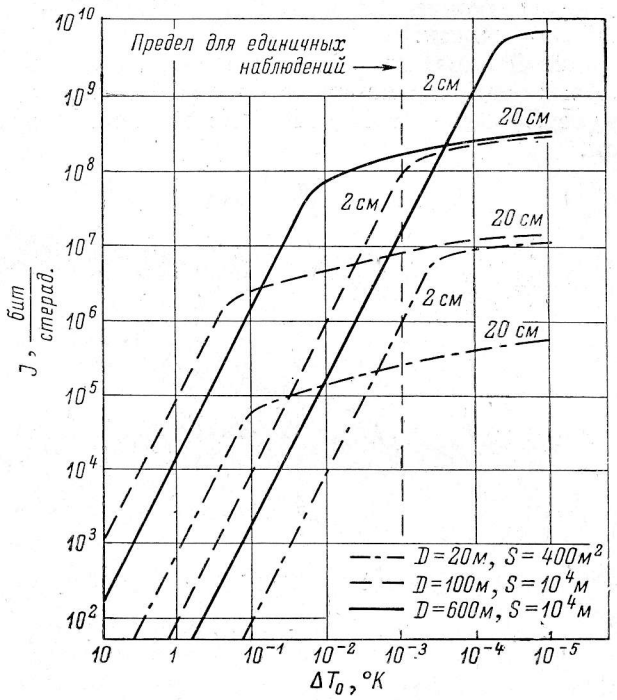

Рис. 4.

характеризующего геометрию антенны η. Последний при заданных S и λ пропорционален полосе пространственных частот инструмента. При большом отношении сигнала к шуму ($\delta T_{\text{с}}/\Delta T_{\text{ш}} \gg 1$)

$$I_\lambda \sim D_x D_y \log_2\left(1 + \frac{\delta T_{\text{с}}}{\Delta T_{\text{ш}}}\right),$$

т. е. информативность можно повышать главным образом путем увеличения геометрических размеров антенны (без увеличения площади), однако

достигнуть этого нелегко, так как необходимо выйти из области малых значений отношения $\frac{\delta T_c}{\Delta T_ш}$.

При $\frac{\delta T_c^2}{\Delta T_ш^2} \ll 1$ логарифм в (10) можно заменить первым членом разложения

$$I \sim \text{const} \frac{1}{\sqrt{D_x D_y}} \cdot \frac{S_{эфф}}{\Delta T_0^2}.$$

В этом случае информативность слабо зависит от геометрии антенны, определяющим параметром является чувствительность.

На рис. 4 приведена зависимость информативности радиотелескопа (I) от чувствительности приемного устройства $\left(\Delta T_0 = \frac{T_ш}{\sqrt{\Delta f \cdot n}}\right.$, где n — число осреднений) для двух типов радиотелескопов — инструмента со сплошной апертурой при стороне квадрата D, равной 20 и 100 м, и инструмента параллельного апертурного синтеза той же площади, что и 100-метровый телескоп, но с $D = 600$ м (крест, кольцо, $\eta = 36$), а в таблице даны значения $I_0 = 2\frac{D_x D_y}{\lambda^2}$, т. е. количество информации, которое можно получить с единичной площадки неба при отношении сигнала к шуму на выходе радиотелескопа, равном единице.

λ (см)	$I_0 = 2\frac{D_x D_y}{\lambda^2}$		
	$D = 20$ м, $S = 400$ м²	$D = 100$ м, $S = 10^4$ м²	$D = 600$ м, $S = 10^4$ м²
2.0	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^7$	$1.8 \cdot 10^9$
20.0	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$	$1.8 \cdot 10^7$

Как видно из рис. 4 и таблицы, для реализации потенциальных возможностей радиотелескопа крайне важно использование высокочувствительных приемных устройств, особенно в случае апертурного синтеза. Только при применении предельных по чувствительности радиометров можно приблизиться к области, где исчерпываются информативные возможности антенны, обусловленные ее геометрией. Заметим, что предельной чувствительностью радиометра для единичного наблюдения при $\tau = 1$ сек. можно считать величину порядка 10^{-3}°K. Органичивающим фактором при этом для радиотелескопа на поверхности Земли являются шумы антенны и неба (атмосферы и Метагалактики).

Литература

1. Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, **11**, № 12, 1773, 1968.
2. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. ИЛ, 1963.
3. M. Ryle and A. Hewish. The synthesis of large telescopes. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **120**, №o. 3, 1960.
4. J. D. Kraus, R. S. Dixon, R. O. Fischer, Astrophys. J., **144**, May 1966.
5. Ю. Н. Парийский, С. Э. Хайкин, Изв. Гл. астрон. обс. в Пулкове, № 172, 1964.

Декабрь 1968 г.