УДК 522.59 : 531.7

О РОЛИ ЭТАЛОНА ЧАСТОТЫ В РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

А. Ф. Дравских, А. М. Финкельштейн

Показано, что при радиоинтерферометрических измерениях геодинамические и геофизические параметры определяются в системе принятого стандарта частоты, а координаты источников — независимо от нее.

It is shown that in radio interferomentric measuremets the geodynamic and geodetic parameters are determined at the adopted frequency standard system and the source coordinates are determined independently of it.

Методика определения неизвестных параметров в радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами состоит в том, что за счет наблюдений некоторого числа источников в определенном числе часовых углов формируется разрешимая система уравнений, позволяющая определить координаты источников и параметры интерферометра [1]. В качестве непосредственно наблюдаемых (измеряемых) величин в интерферометрии выступают временная задержка τ (или разность фаз) или частота интерференции F, в то время как координаты источников (α, δ), проекции базы интерферометра $\rho_e=\rho\cos\delta_b$, $\rho_p=\rho\sin\delta_b$, $(\rho^2=\rho_e^2+\rho_p^2)$, где δ_b — склонение базы, значение угловой скорости вращения Земли Ω, поправка часов p и относительная разность частот гетеродинов q определяются косвенно из решения соответствующей системы уравнений для τ и F.

Значения τ и F находятся путем сравнения с имеющимся на пунктах интерферометра эталоном времени* (стандартом частоты) t, который имеет погрешность Δt относительно идеального эталона $t_и$:

$$\Delta t=\mu t_и\approx\mu t, \tag{1}$$

где $\mu=(t-t_и)/t_и$ — постоянная, определяющая относительную разность используемого и идеального эталонов.

Покажем, что в отсутствие флуктуационных шумов аппаратуры и среды распространения в результате обработки интерферометрических наблюдений угловые переменные: склонения δ источников, разность прямых восхождений источников $\alpha-\alpha_b$, где α_b — прямое восхождение базы интерферометра в некоторый момент, — и склонение базы δ_b определяются абсолютным образом, т. е. не зависят от неточности принятого стандарта частоты, а проекции базы ρ_e, ρ_p и угловая скорость вращения Земли Ω определяются относительным образом, поскольку зависят от принятого стандарта. Короче говоря, все безразмерные параметры определяются абсолютно, все размерные — относительно.

Очевидно, что этот результат есть прямое следствие простых размерных соображений, которые мы рассмотрим для общего случая косвенных измерений независимых постоянных параметров x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, связанных с непосредственно наблюдаемой величиной Φ соотношением

$$\Phi=f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где t — единственная независимая переменная (в интерферометрии — время).

Пусть размерность t будет $[t]=t_0$, где t_0 — единица измерения t, тогда остальные параметры и наблюдаемая величина Φ имеют производные от t_0 размерности

* Имеется в виду эталон отрезков времени t.

$$[\Phi] = t_0^{\lambda}; \quad [x_i] = t_0^{\lambda_i}, \tag{3}$$

где λ, λ_i — любые вещественные числа. В этом случае Φ может быть представлена в виде

$$\Phi = t_0^{\lambda} f_1\left(\frac{t}{t_0}, \frac{x_1}{t_0^{\lambda_1}}, \ldots, \frac{x_n}{t_0^{\lambda_n}}\right), \tag{4}$$

где f_1 — безразмерная функция безразмерных параметров $x_i/t_0^{\lambda_i}$ и переменной t/t_0. Таким образом, исходную зависимость можно записать в виде, не зависящем от выбора единицы измерения независимой переменной t:

$$\Pi = f_1(t/t_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_n), \tag{5}$$

где

$$\Pi = \Phi/t_0^{\lambda}; \quad \Pi_i = x_i/t_0^{\lambda_i}.$$

Представление (2) в форме (5) является частным следствием Π-теоремы теории размерностей [2].

Накапливая значения Π в процессе наблюдения в разные моменты времени и решая систему уравнений, можно определить все Π_i. По определению безразмерной величины Π_i не зависит от выбора единицы измерения независимой переменной. Конкретно это означает: измерение x_i в долях выбранной единицы измерения t_0 не приводит к ошибке измерения Π_i, как бы ни была ошибочна единица измерения t_0 относительно истинной единицы измерения $t_{0и}$. Т. е.

$$\Delta\Pi_i = \frac{\Delta x_i}{t_0^{\lambda_i}} - \lambda_i \frac{x_i}{t_0^{\lambda_i+1}} \Delta t_0 = 0. \tag{6}$$

Но при этом параметр x_i, естественно, будет определен с ошибкой, определяемой ошибкой использованной единицы измерения t_0 относительно истинной единицы. Пусть ошибка в знании масштаба t_0 будет $\Delta t_0 = \mu t_{0и} \approx \mu t_0$, тогда из (6) будем иметь

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \lambda_i \mu. \tag{7}$$

Таким образом, при косвенных измерениях все безразмерные параметры ($\lambda_i = 0$) определяются абсолютно, а размерные ($\lambda_i \neq 0$) требуют фиксирования масштаба независимой переменной.

Отсюда применительно к параметрам, определяемым в результате обработки радиоинтерферометрических измерений, имеем: размерности параметров

$$[\delta] = [\alpha - \alpha_b] = [\delta_b] = [q] = t_0^0$$

и, согласно (7), погрешности их измерения

$$\Delta\delta = \Delta(\alpha - \alpha_b) = \Delta\delta_b = \Delta q = 0, \tag{8}$$

а размерности параметров

$$\left[\frac{1}{c}\rho_e\right] = \left[\frac{1}{c}\rho_p\right] = \left[\frac{1}{c}\rho\right] = [p] = t_0^1; \quad [\Omega] = t_0^{-1}$$

и их относительные погрешности

$$\Delta\rho_e/\rho_e = \Delta\rho_p/\rho_p = \Delta\rho/\rho = \Delta p = \mu, \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = -\mu \tag{9}$$

(c — скорость света).

Таким образом, при радиоинтерферометрических измерениях геодинамические и геофизические параметры (ρ_e, ρ_p, Ω) определяются в системе принятого опорного стандарта времени (частоты), а координаты источников — безотносительно к нему.

Приложение. В качестве примера, иллюстрирующего общие рассуждения, рассмотрим, как можно получить (8), (9) при обработке системы конкретных радиоинтерферометрических уравнений, образованной измерениями временной задержки τ:

$$c\tau = \rho_p \sin\delta + \rho_e \cos\delta \cos(\Omega t + \alpha - \alpha_b).$$

Сделаем четыре независимых отсчета τ и исключим $\rho_p \sin\delta$ и $\rho_e \cos\delta$. Тогда будем иметь:

$$\frac{\tau_3-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}=\frac{\cos(\Omega t_3+\alpha-\alpha_b)-\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b)}{\cos(\Omega t_2+\alpha-\alpha_b)-\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b)};$$

$$\frac{\tau_4-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}=\frac{\cos(\Omega t_4+\alpha-\alpha_b)-\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b)}{\cos(\Omega t_2+\alpha-\alpha_b)-\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b)}.$$

Поскольку, согласно (1), $\Delta\tau_i \approx \mu\tau_i$, то ошибка левых частей этой системы равна нулю. Тогда система для ошибок $\Delta\Omega$ и $\Delta(\alpha-\alpha_b)$ будет иметь структуру:

$$\begin{cases} A_1\Delta\Omega + B_1\Delta(\alpha-\alpha_b) = -A_1\mu\Omega; \\ A_2\Delta\Omega + B_2\Delta(\alpha-\alpha_b) = -A_2\mu\Omega, \end{cases}$$

где $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, так как $A_1 \cdot B_2$ содержит t_3, а $A_2 \cdot B_1$ — t_4. Следовательно,

$$\Delta(\alpha-\alpha_b)=0, \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega}=-\mu. \qquad (\text{П}1)$$

Так как

$$c(\tau_1-\tau_2)=\rho_e\cos\delta\,[\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b)-\cos(\Omega t_2+\alpha-\alpha_b)],$$

то, принимая во внимание (П1), видим, что ошибка выражения в квадратных скобках равна нулю и, следовательно,

$$\Delta(\rho_e\cos\delta)/\rho_e\cos\delta=\mu. \qquad (\text{П}2)$$

Далее,

$$\rho_p\sin\delta=c\tau_1-\rho_e\cos\delta\cos(\Omega t_1+\alpha-\alpha_b),$$

и, принимая во внимание (П1) и (П2), имеем:

$$\Delta(\rho_p\sin\delta)/\rho_p\sin\delta=\mu. \qquad (\text{П}3)$$

Пусть наблюдаются два источника. Эти наблюдения дают уравнения вида

$$\begin{cases} \rho_p\sin\delta_1=f_1; \\ \rho_p\sin\delta_2=f_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_e\cos\delta_1=\Phi_1; \\ \rho_e\cos\delta_2=\Phi_2, \end{cases}$$

откуда следует

$$\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}=\frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \qquad \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}=\frac{f_1}{f_2}.$$

Поскольку, согласно (П2) и (П3), $\Delta\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)=\Delta\left(\frac{f_1}{f_2}\right)=0$, то

$$\Delta\delta=0. \qquad (\text{П}4)$$

Учитывая (П4), из (П2) и (П3) найдем $\frac{\Delta\rho_e}{\rho_e}=\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}=\frac{\Delta\rho}{\rho}=\mu$. Наконец, поскольку $\delta_b = \operatorname{arc\,tg}(\rho_p/\rho_e)$ и $\Delta(\rho_p/\rho_e)=0$, то

$$\Delta\delta_b=0.$$

Литература

1. Дравских А. Ф., Финкельштейн А. М. Радиоинтерферометрия как средство совместного решения основных задач астрометрии и астрофизики. — В кн.: Геодинамика и астрометрия. Киев: Наукова думка, 1980, 137.
2. Бриджмен П. Анализ размерностей. ОНТИ, 1934. 162 с.

Поступила в редакцию 30.11.81