О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФОЙГТОВСКОГО ПРОФИЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

В. К. Херсонский

Рассмотрена связь интеграла, описывающего фойгтовский профиль спектральной линии, с различными специальными функциями. Получены разложения этого интеграла в ряды при различных значениях параметров, характеризующих спектральную линию. Обсуждены его дифференциальные и интегральные свойства, а также методы интегрирования как самой фойгтовской функции, так и зависящих от нее функций. Для иллюстрации применения полученных результатов вычислены некоторые интегралы, играющие важную роль в теории переноса излучения.

The interrelation between the integral which describes the Voigt profile of the spectral line, and the different special functions is considered. The expansion of this integral into infinite series under different values of the parameters characterising the spectral line are obtained. Its differential and integral properties and the methods of integration of the Voigt function as well as the functions which are determined by the Voigt function are discussed. For the illustration of the obtained results using, some integrals which play an important role in the radiation transfer theory, are calculated.

Введение

Функция Фойгта определяет зависимость коэффициента поглощения в линии от частоты и поэтому играет важнейшую роль во всех вопросах, связанных с интерпретацией формы спектральной линии. Она широко используется при решении вопросов о переносе излучения, связанных со многими астрофизическими проблемами, с задачами, возникающими при изучении планетных атмосфер, с теорией радиационных эффектов в плазме и целым рядом других областей.

Как хорошо известно, эта функция определяется интегралом, выражающим тот факт, что фойгтовский профиль линии представляет собой суперпозицию лорентцевского и доплеровского контуров [1]:

$$H(x,\ y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-t^2)}{y^2+(x+t)^2}\,dt, \tag{1}$$

где

$$x=(\nu-\nu_0)/\Delta\nu_{\mathrm{D}};\quad y=(\Delta\nu_{\mathrm{e}}+\Delta\nu_{\mathrm{c}})/\Delta\nu_{\mathrm{D}}. \tag{2}$$

В этих формулах ν — частота наблюдения; ν_0 — частота центра линии; $\Delta\nu_{\mathrm{e}}$, $\Delta\nu_{\mathrm{c}}$ и $\Delta\nu_{\mathrm{D}}$ представляют собой естественную, столкновительную и доплеровскую полуширины спектральной линии соответственно.

Обзор свойств функции Фойгта имеется в работе [2]. Трудность непосредственной работы с интегральным представлением (1) привела к появлению ряда работ, посвященных численному исследованию этой функции (см. например, работы [3, 4]). Что касается аналитических свойств фойгтовского интеграла, то они изучены сравнительно слабо. Вместе с тем именно эти свойства представляют значительный интерес при аналитическом описании явлений переноса излучения, поскольку во многих случаях фойгтовский профиль определяет ядра интегральных уравнений, фигурирующих в теории переноса. Поэтому цель данной работы заключается в дальнейшем исследовании аналитических свойств функции Фойгта $H(x, y)$, а именно в обсуждении ее связи с другими хорошо изученными специальными функциями, изучении ее разложений в ряды различных типов, а также в рассмотрении дифференциальных и интегральных свойств и методов интегрирования функций, содержащих фойгтовские функции, путем разложения соответствующих интегралов в ряды.

В связи с этим отметим наиболее существенные аналитические результаты, полученные до настоящего времени.

Важное интегральное представление для $H(x, y)$ имеется в работе [5]:

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-yt - \frac{t^2}{4}\right) \cos xt\,dt. \tag{3}$$

Разложение функции $H(x, y)$ при $y \ll 1$ изучалось в работах [3, 6, 7, 8] в виде

$$H(x, y) = H_0(x) + yH_1(x) + y^2H_2(x) + \ldots, \tag{4}$$

причем в работе [8] коэффициенты ряда (4) вычислены до $H_4(x)$ включительно. Более общее разложение было получено в работе [9]:

$$H(x, y) = \exp(y^2 - x^2)\cos 2xy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \frac{y^n}{n!}, \tag{5}$$

где $F^{(n)}(x) = d^nF(x)/dx^n$ и $F(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2)\,dt$.

Три члена разложения фойгтовской функции при больших x и y имеются в работе [10]:

$$H(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^2 + y^2} \left\{1 + \frac{3x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)^2} + \frac{15x^4 - 30x^2y^2 + 3y^4}{4(x^2 + y^2)^4} + \ldots\right\}. \tag{6}$$

Кроме того, в работе [9] получено следующее разложение, справедливое при больших x:

$$H(x, y) = (\cos 2xy + \sin 2xy)\exp(y^2 - x^2) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2m + n)!\,\sin(\pi n/2)}{2^{2m} m!\,n!} \frac{y^n}{x^{2m+n+1}}, \tag{7}$$

из которого следует упрощенная формула

$$H(x, y) \approx \frac{y}{\sqrt{\pi}x^2} \left\{1 + \left(\frac{3}{2} - y^2\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{15}{4} - 5y^2 + y^4\right)\frac{1}{x^4} + \ldots\right\}. \tag{7a}$$

Ниже будут получены более общие формулы, из которых выражения (4)—(7а) следуют как частные случаи при различных значениях параметров x и y.

Связь фойгтовского интеграла с другими специальными функциями и его дифференциальные свойства

Связь функции $H(x, y)$ с различными хорошо изученными специальными функциями может быть получена, если интегральное представление (3) выразить в комплексном виде

$$H(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}\left\{\int_0^\infty \exp\left(-yt - \frac{t^2}{4}\right) \exp(ixt)\,dt\right\}. \tag{8}$$

Тогда интеграл, заключенный в фигурные скобки, вычисляется с помощью модифицированной функции ошибок Erfc (z) [11] от комплексного аргумента $z=y+ix$. Используя также связь функции Erfc (z) с вырожденными гипергеометрическими функциями $\psi\,(a,\ b;\ z)$ [11], неполными гамма-функциями $\Gamma\,(a,\ z)$ [12] и функциями параболического цилиндра $D_\mu(z)$ [12], получаем следующие соотношения:

$$H\,(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Re}\left\{\psi\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ z^2\right)\right\};\tag{9а}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Re}\,\{\exp\,(z^2)\,\mathrm{Erfc}\,(z)\};\tag{9б}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\,(z^2)\,\Gamma\left(\frac{1}{2},\ z^2\right)\right\};\tag{9в}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(\frac{z^2}{2}\right)D_{-1}\,(\sqrt{2}z)\right\},\tag{9г}$$

где $z=y+ix$. Эта цепочка соотношений легко может быть продолжена, если использовать связь специальных функций в (9) с различными известными функциями, например с интегралом вероятностей. Два других выражения могут быть получены совершенно иным путем.

Если в подынтегральном выражении в (3) множитель $\exp\,(-yt)$ разложить в степенной ряд, произвести почленное интегрирование, а затем после несложных преобразований полученного ряда осуществить его свертку, можно получить, что

$$H\,(x,\ y)=\exp\,(y^2-x^2)\cos 2xy-\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\,\psi_2\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -x^2,\ y^2\right),\tag{10}$$

где ψ_2 — вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных [11]. Другое выражение, связывающее $H\,(x,\ y)$ с вырожденной гипергеометрической функцией двух переменных ψ_1, представляет собой предельное соотношение и может быть получено из (1) после предварительной замены переменной $z=(x-t)/y$. Далее используется та же процедура, что и при получении (10). Это дает

$$H\,(x,\ y)=\frac{\exp\,(-x^2)}{\sqrt{\pi}y}\lim_{u\to\infty}\psi_1\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ u,\ x^2,\ -\frac{u}{y^2}\right).\tag{11}$$

Использование полученных соотношений, связывающих фойгтовскую функцию с различными специальными функциями, существенно облегчает изучение свойств $H\,(x,\ y)$, так как свойства специальных функций в (9)—(11) очень хорошо изучены. Это обстоятельство будет использовано ниже.

Представляют интерес также дифференциальные свойства функции Фойгта. При этом отметим, что поскольку $H\,(x,\ y)$ является четной функцией x, то ее дифференциальные свойства могут быть рассмотрены только на положительной полуоси $x\geqslant 0$.

С помощью простых преобразований легко показать, что функция $H\,(x,\ y)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}\,H\,(x,\ y)+2xH\,(x,\ y)=\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\exp\left(-yt-\frac{t^2}{4}\right)\sin xtdt\tag{12}$$

с начальным условием при $x=0$

$$H\,(0,\ y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\,(y^2)\,\mathrm{Erfc}\,(y).\tag{13}$$

Решение этого уравнения дает интегральное представление для $H(x, y)$ в виде неопределенного интеграла

$$H(x, y) = \exp(-x^2)\left\{H(0, y) + \frac{2y}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-yt - \frac{t^2}{4}\right)\int_0^x \exp(x^2)\sin xt dx dt\right\}. \quad (14)$$

Это соотношение оказывается удобным для получения разложения $H(x, y)$ в ряд при $x \ll 1$, что будет использовано в следующем параграфе.

Далее непосредственно из (3) следует, что фойгтовская функция, как функция двух переменных, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(x, y) = 0 \quad (15)$$

с граничными условиями

$$H(0, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(y^2)\,\mathrm{Erfc}(y); \quad H(\infty, y) = 0; \quad (16а)$$

$$H(x, 0) = \exp(-x^2); \quad H(x, \infty) = 0. \quad (16б)$$

То есть функция $H(x, y)$ является гармонической, и к ней могут быть применены все теоремы из теории гармонических функций. С другой стороны, как решение уравнения Лапласа, фойгтовская функция формально может быть изучена методами теории потенциала.

Отметим также еще одно дифференциальное свойство этой функции. Используя (12) и (15), можно показать, что $H(x, y)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} H(x, y) + [1 + 2(x^2 + y^2)]\, H(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{\pi}} \quad (17)$$

с граничными условиями (16а). Уравнение (17) представляет собой неоднородное уравнение Вебера [13], откуда следует, что фойгтовская функция может быть разложена в ряд по линейным комбинациям функций Вебера.

Разложение фойгтовской функции в ряды

Обсуждение разложений функции $H(x, y)$ в ряды начнем с выражений, имеющих быструю сходимость при $|x| < 1$. Из таких соотношений в первую очередь отметим тейлоровский ряд, который имеет вид

$$H(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n D_{-2n-1}(\sqrt{2}y). \quad (18)$$

Другое удобное выражение может быть получено непосредственно из интегрального представления (14), которое, как это показано выше, является решением дифференциального уравнения (12). Если в подынтегральном выражении в (14) функцию $\sin xt$ разложить в степенной ряд и произвести вычисление соответствующих интегралов, можно получить, что

$$H(x, y) = \exp(-x^2)\left\{H(0, y) + \frac{4y}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1 - \exp(x^2)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x^2)^k}{k!}\right]\frac{d^{2n+1}}{dy^{2n+1}}\{\exp(y^2)\,\mathrm{Erfc}(y)\}\right\}. \quad (19)$$

Отметим, что полином, стоящий в квадратных скобках, при больших n стремится к $\exp(-x^2)$, что обеспечивает быструю сходимость рассматриваемого ряда.

Еще одно выражение, удобное при малых $|x| < 1$, может быть получено из (9г), если воспользоваться теоремой сложения для функций Вебера [12, 13]. Это разложение имеет вид

$$H(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(y^2 - x^2) \cos(2xy) \operatorname{Erfc}(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} \left\{ \sin(2xy) L_n^{(-1/2)}(y^2) - \frac{xy}{n+1} \cos(2xy) L_n^{(1/2)}(y^2) \right\}, \quad (20)$$

где $L_n^{(a)}(z)$ — полиномы Лагерра [12].

Для получения разложения фойгтовской функции при $|x| > 1$ воспользуемся формулой (9б), в которой функцию $\operatorname{Erfc}(z)$ представим в виде ряда [12]. Выделяя вещественную часть этого ряда, получаем разложение вида

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)_n}{(x^2 + y^2)^n} \left(\cos 2n\varphi - \frac{x}{y} \sin 2n\varphi \right), \quad (21)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(x/y)$, $(a)_n$ — символ Похгаммера [11]. Если в этом выражении ограничиться двумя членами, то получаем формулу (6). Подстановка φ в (21) и дальнейшие преобразования приводят (21) к виду

$$H(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\pi}\, x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\,(2n-1)!!}{2^n} \frac{1}{(x+y)^{2n+1}} Q_n\left(\frac{y}{x}\right), \quad (22)$$

где полином Q_n определяется выражением

$$Q_n\left(\frac{y}{x}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)!!\,(2i+1)!!} \left(\frac{y}{x}\right)^{2i}. \quad (23)$$

Формула (22) обобщает асимптотическое представление (7), приведенное в [9].

Рассмотрим ряды для фойгтовской функции, удобные при $y < 1$. Первый из них (тейлоровский ряд) может быть получен из интегрального представления (3), если в нем функцию $\exp(-yt)$ представить в виде степенного ряда и произвести вычисление интегралов. Тогда получаем

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2y)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Phi\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; -x^2\right), \quad (24)$$

где $\Phi(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [11], $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [12]. Это разложение обобщает формулу (4). Как следует отсюда, общее выражение для $H_n(x)$ имеет вид

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Phi\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; -x^2\right),$$

что позволяет вычислить любой из коэффициентов $H_n(x)$. Поскольку $H_0(x), \ldots, H_4(x)$ были вычислены в работе [8], здесь приведем формулы для следующих двух коэффициентов $H_5(x)$ и $H_6(x)$:

$$H_5(x) = -4\,[(2 - 9x^2/2 + x^4) - 15x\,(1 - 4x^2/3 + 4x^4/15)\,F(x)/2]/15\sqrt{\pi};$$

$$H_6(x) = \exp(-x^2)\,(1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6/15)/6;$$

причем $F(x)$ определена в формуле (5).

Выражение (24) можно представить в другом виде через полиномы Вебера $k_m(z)$ [13]:

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\left[\cos 2xy + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2xy\ \mathrm{Erfi}(x)\right] -$$

$$- \frac{2y}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2y^2)^n}{(2n+1)!}k_{2n+1}(\sqrt{2}\,x). \qquad (25)$$

Ряд в (25) имеет более быструю сходимость, чем (24), поскольку общий член в данном случае пропорционален y^{2n}, а не y^n, как это имеет место в (24). Два дополнительных соотношения при $y < 1$ могут быть получены с использованием теорем сложения для функций Вебера [12, 13]:

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\left[\cos 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin 2xy\ \mathrm{Erfi}(x)\right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\exp(y^2)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}(-4y^2)^n\left\{\cos 2xy L_n^{(-1/2)}(-x^2) + \frac{xy}{n+2}\sin 2xy L_n^{(1/2)}(-x^2)\right\}; \qquad (26)$$

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\cos 2xy - \frac{2y}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y^2)^k}{(2k+1)!}\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\{\exp(-x^2)\ \mathrm{Erfi}(x)\}. \qquad (27)$$

При $y > 1$ удобные разложения могут быть получены из основного интегрального представления (1). Если в этом интеграле произвести замену переменной $(x-t)/y = z$, а затем представить знаменатель в виде геометрической прогрессии и вычислить соответствующие интегралы, получаем, что

$$H(x,\ y) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}\,y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1/2)_n}{y^{2n}}\Phi\left(n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right) = \qquad (28)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{y^{2n}}L_n^{(-1/2)}(-x^2), \qquad (29)$$

где была использована связь вырожденных гипергеометрических функций и полиномов Лагерра. Отметим два разложения фойгтовской функции, справедливых при $x^2 + y^2 < 1$.

Первое получается из (9б), если представить функцию ошибок в виде ряда и выделить вещественную часть. Это дает

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\cos 2xy - \frac{2y}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2+y^2)^n}{(3/2)_n}\left(\cos 2n\varphi - \frac{x}{y}\sin 2n\varphi\right). \qquad (30)$$

Второе можно легко получить, если в интегральном представлении (3) функцию $\exp(-yt)\cos xt$ представить как произведение двух бесселевых функций полуцелого порядка и произвести интегрирование. Тогда при $x^2 + y^2 < 1$ получаем

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\cos 2xy - 2y\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^n}{(n+1)\,\Gamma(n+1/2)}U_n\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), \qquad (31)$$

где $U_n(z)$ — полином Чебышева.

Целый ряд разложений для $H(x,\ y)$ может быть получен из (9а) с помощью теорем сложений для вырожденной гипергеометрической функции. Укажем лишь два из них:

$$H(x,\ y) = \exp(y^2 - x^2)\left[\cos 2xy - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2xy)^{2n}}{(2n)!}\frac{\gamma(1/2 - 2n,\ y^2 - x^2)}{\Gamma(1/2 - 2n)}\right], \qquad (32)$$

$$H(x,\ y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(y^2-x^2)\cos 2xy\ \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)+\frac{4}{\pi\sqrt{y^2-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\Gamma(n+1/2)}{(n\,!)^2}\times$$
$$\times\left[\frac{xy}{2(x^2+y^2)}\right]^n H_{2n-1}\left(\sqrt{y^2-x^2}\right)\cos\left(2xy+\frac{\pi n}{2}-n\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2xy}{y^2-x^2}\right). \tag{33}$$

Сходимость обоих этих рядов очень быстрая, особенно в том случае, когда $|x|\approx y$.

Во многих случаях может представлять интерес разложение в ряды не самой фойгтовской функции, а произвольной функции от $H(x,\ y)$. При этом удобно использовать нормированную функцию Фойгта [1]

$$\alpha(x,\ y)=H(x,\ y)/H(0,\ y). \tag{34}$$

Для разложения произвольной функции $R(\alpha)$ в ряд по некоторым функциям $w(x)$ воспользуемся результатами общей теории рядов Бурмана—Лагранжа [14]. Если нечетная функция $w(x)$ имеет при $x=0$ нуль первого порядка, т. е. может быть представлена в виде $w(x)=xg(x)$, причем $g(0)\neq 0$, то функция $R(\alpha)$ разлагается в ряд

$$R(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n w^n(x). \tag{35}$$

Так как $R(\alpha)$ — четная функция от x, то все коэффициенты ряда при нечетных n равны 0. Для четных n коэффициенты d_{2n} могут быть вычислены по формулам

$$d_0=1;$$
$$d_{2n}=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-q-1}(-1)^{q+s+1}\frac{q+1}{(2n-2q-2s-2)\,!}c_{q+1}a_s\theta_{2n-2q-2s-2}, \tag{36}$$

где

$$c_\varkappa=2^\varkappa D_{-2\varkappa-1}(\sqrt{2}\,y)/D_{-1}(\sqrt{2}\,y); \tag{37}$$

$$a_s=\sum_{i,\,j,\,h,\,\ldots\,k}\frac{1}{i\,!\,j\,!\,h\,!\ldots k\,!}\left\{\frac{d^{m+1}}{d\alpha^{m+1}}R(\alpha)\right\}\bigg|_{x=0}c_1^ic_2^jc_3^h\ldots c_l^k. \tag{38}$$

Причем индексы $i,\ j,\ h,\ldots,\ k,\ m$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} i+j+h+\ldots+k=m;\\ i+2j+3h+\ldots+lk=s. \end{gathered} \tag{39}$$

Наконец,

$$\theta_\mu=\lim_{x\to 0}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(\frac{1}{g^{2n}(x)}\right). \tag{40}$$

В частности, легко видеть, что если $R(\alpha)=\alpha$, то все $a_s=0$, за исключением $a_0=1$. Если

$$g(x)=\exp(-\beta^2x^2)\ \text{(доплеровский профиль)}, \tag{41а}$$

то

$$\theta_{2n-2q-2s-2}=(2n\beta^2)^{n-q-s-1}\frac{(2n-2q-2s-2)\,!}{(n-q-s-1)\,!}. \tag{41б}$$

В другом случае, если

$$g(x)=1/(1+\beta^2x^2)\ \text{(лорентцевский профиль)}, \tag{42а}$$

то

$$\theta_{2n-2q-2s-2}=(2\beta^2)^{n-q-s-1}\frac{(2n)\,!\,(2n-2q-2s-3)\,!!}{(n+q+s+1)\,!}. \tag{42б}$$

Таким образом, формулы (35)—(42) позволяют разложить произвольную функцию от фойгтовского профиля линии (и в том числе сам фойгтовский профиль) по функциям, представляющим собой произведение безразмерной частоты x, на доплеровский или лорентцевский профили, т. е. получить ряды

$$R(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}\,[x\exp(-\beta^2x^2)]^{2n};\quad R(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}\left(\frac{x}{1+\beta^2x^2}\right)^{2n}.$$

В заключение параграфа обратимся к важному вопросу об обращении зависимости фойгтовской функции от частоты, т. е. об определении зависимости $x=\varphi(H)$ или $x=\Phi(\alpha)$, которая, как будет видно из следующего параграфа, очень полезна при вычислении интегралов от фойгтовских функций. Этот вопрос также может быть решен с помощью теории рядов Бурмана—Лагранжа. Четность функции $\alpha(x)$ позволяет рассмотреть обратную зависимость $x=\Phi(\alpha)$ только на положительной полуоси. Обратную зависимость можно получить с помощью разложения

$$x=\Phi(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k f^k(\alpha), \tag{43}$$

где $f(\alpha)$ — некоторая произвольная функция от α, имеющая нуль первого порядка при $x\to 0$. Удобно выбрать $f(\alpha)$ в виде

$$f(\alpha)=\sqrt{1-\alpha}. \tag{44}$$

Такая функция достаточно проста и вместе с тем удовлетворяет необходимому требованию $f(\alpha)\propto x$ при малых x. Ясно, что при таком выборе $f(\alpha)$ в (43) $b_0=0$. Более того, все коэффициенты b_k с четными k равны нулю. Коэффициенты b_k с нечетными $k=2n+1$ могут быть вычислены по формулам, приведенным в [14]. Здесь выпишем лишь окончательный результат, который представим в виде полинома

$$b_{2n+1}=\frac{1}{2\Gamma(n+3/2)}\sum_{i,\,j,\,h,\dots k}\frac{\Gamma(n+m+1/2)}{i!\,j!\,h!\dots k!}\,\frac{c_2^i c_4^j c_6^h\dots c_{2l}^k}{c_1^{n+m+1/2}}. \tag{45}$$

Индексы i, j, h, ... k и m определяются уравнениями (39), в которых нужно произвести переобозначение $s\to n$. Величины $c_\varkappa$ определяются выражениями (38). Приведем соотношения для нескольких первых коэффициентов:

$$\begin{gathered}b_1=1/c_1^{1/2};\quad b_3=c_2/2c_1^{5/2};\quad b_5=(7c_2^2/4+c_4c_1)/2c_1^{9/4};\\ b_7=(33c_2^3/8+9c_4c_2c_1/2+c_6c_1^2)/2c_1^{13/2}.\end{gathered} \tag{46}$$

Таким образом, выражение

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(1-\alpha)^{n+1/2} \tag{47}$$

с коэффициентами (45), (46) представляет собой обратную функцию для фойгтовского интеграла. Разложение (47) будет использовано в следующем параграфе для вычисления целого ряда интегралов от фойгтовской функции методом их разложений в ряды.

Интегральные свойства функции Фойгта

Рассмотрим некоторые интегральные свойства фойгтовского профиля спектральной линии. В этом аспекте представляют интерес как интегралы от фойгтовских функций в комбинации с какими-либо другими функциями, так и интегрирование функций от фойгтовского интеграла. Следует отметить, что в большинстве случаев такие интегралы не могут быть вычислены в замкнутом виде, т. е. выражены через какие-либо специальные функции или соотношения полиномиального типа. Поэтому для их вычисления используют численное интегрирование. Однако, как это будет показано ниже, даже в этом случае многие из интересных интегралов, т. е. интегралов, которые играют важную роль в теории переноса излучения и определяют ядра соответствующих интегральных уравнений, могут быть вычислены в виде рядов. Существенно то, что эти ряды являются однократными. Как отмечено в [1], такие разложения интегралов от фойгтовской функции оказываются очень полезными даже при дальнейшем вычислении их на ЭВМ, поскольку они позволяют проводить вычисления, не прибегая к численному интегрированию.

Обсуждение интегральных свойств начнем с рассмотрения простейших интегралов, которые могут быть вычислены, если использовать интегральное представление (3) и свойства δ-функции Дирака. В этом случае имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{48}$$

Этот интеграл хорошо известен и используется при нормировке профиля линии. Аналогично получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\, H(x, y')\, dx = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[\frac{(y+y')^2}{2}\right]\left\{1 - \Phi\left(\frac{y+y'}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \tag{49}$$

Интегральное представление (3) оказывается также полезным при вычислении целого ряда других интегралов. Так, например, изменение порядка интегрирования в (3) и последующие преобразования позволяют рассчитать в полиномиальном виде следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\frac{x^{2m}}{(a^2+x^2)^{n+1}}\, dx = (-1)^{m+n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2m)\,!}{2^n n\,!}\, a^{2(m-n)-1}\exp\left[\frac{(a+y)^2}{2}\right]\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n} \beta_{n,\,k} a^k D_{-k-1}\left[\sqrt{2}\,(a+y)\right], \tag{50}$$

где

$$\beta_{n,\,k} = (-1)^k\, 2^{k/2}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n+i)\,!}{(n-i-k)\,!\,(2m-n+k-i)\,!\,i\,!}\left(-\frac{1}{2}\right)^i, \quad n+1 \geqslant 2m \geqslant 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\exp(-a^2x^2)\, x^{2n} dx = (-1)^n\frac{n\,!}{a^{2n}}\left(\frac{1}{2}\right)_n\sqrt{\frac{2}{1+a^2}}\exp\left[\frac{y^2a^2}{2(1+a^2)}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\left(\frac{2}{1+a^2}\right)^{n-m}\frac{1}{m\,!}D_{-2n-2m-1}\left(ya\sqrt{\frac{2}{1+a^2}}\right). \tag{51}$$

Из этих результатов непосредственно следует, что интегралы от произведения фойгтовской функции на лорентцевский и доплеровский контуры соответственно имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left[(a+y)^2\right]\operatorname{Erfc}(a+y); \tag{52}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\exp(-a^2x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{1+a^2}}\exp\left(\frac{a^2y^2}{1+a^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{ya}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]. \tag{53}$$

Косинус-преобразование и экспоненциальное преобразование Фурье от $H(x, y)$ получается непосредственно из (3), если учесть, что само это интегральное представление пропорционально косинус-преобразованию от функции $\exp(-yt - t^2/4)$;

$$\int_0^\infty H(x, y)\cos(xv)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-yv - \frac{v^2}{4}\right); \tag{54а}$$

$$\int_{-\infty}^\infty H(x, y)\exp(-ivx)\,dx = \sqrt{\pi}\exp\left(-yv - \frac{v^2}{4}\right). \tag{54б}$$

Точное выражение для синус-преобразования Фурье может быть получено только в виде ряда. Один из таких рядов, имеющий хорошую сходимость при $v > 1$, имеет вид

$$S(v) \equiv \int_0^\infty H(x, y)\sin(xv)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,v}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{v^{2n}}\frac{d^{2n}}{dy^{2n}}\left[\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; y^2\right)\right]. \tag{55}$$

Интересно, однако, что эта функция удовлетворяет простому неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2S(v)}{dy^2} - v^2S(v) = -\frac{1}{v}H(0, y) \tag{56}$$

и при малых y может быть рассчитана с помощью приближенного выражения

$$S(v) = -\frac{i}{2}\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{v^2}{4}\right)\mathrm{Erf}\left(\frac{iv}{2}\right) - \frac{2y}{\sqrt{\pi}}F(v),\quad y \ll 1, \tag{57}$$

причем функция $F(v)$ определена в формуле (5).

Преобразование Лапласа для $H(x, y)$ отличается от синус-преобразования Фурье только наличием множителя $(-1)^n$ под знаком суммы в (55). Более простое выражение имеет важное в приложениях интегральное преобразование Меллина. Вычисление с помощью (3) дает

$$\int_0^\infty x^{s-1}H(x, y)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{-1}\exp\left(\frac{y^2}{4}\right)D_{s-1}(y),\ 0 < s \leqslant 1. \tag{58}$$

Наконец, отметим то интересное обстоятельство, что преобразование Стильтьеса от фойгтовской функции сводится к двойному преобразованию Лапласа

$$\int_0^\infty H(x, y)\frac{dv}{x+v} = \int_0^\infty\left\{\int_0^\infty H(x, y)\exp(-xu)\,dx\right\}\exp(-vu)\,du. \tag{59}$$

Этот результат легко получить с помощью (3), если представить множитель $1/(x+v)$ как интеграл от экспоненциальной функции с аргументом $-(v+x)u$ и изменить порядок интегрирования.

Перейдем к обсуждению методов вычисления более сложных интегралов от фойгтовской функции. При этом будем использовать нормированную функцию Фойгта (34). Это позволит рассматривать интегралы в том виде, в котором они обычно обсуждаются в теории переноса излучения [1].

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$J(x^*) = \int_{-\infty}^{x^*} Q(\alpha(x))\,dx, \tag{60}$$

где $Q(\alpha(x))$ — произвольная функция от фойгтовской функции $\alpha(x)$, но такая, что интеграл (60) сходится. Этот интеграл легко может быть вычислен с помощью разложения в однократный ряд. Для этого воспользуемся разложением (47) для зависимости x от α. Тогда, производя замену переменной в интеграле (60) $\alpha(x)=z$, после простых преобразований получаем

$$J(x^*)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(x^*)\int_0^1 Q(z)(1-z)^{n-1/2}\,dz+\int_{\alpha(x^*)}^{1} Q(z)(1-z)^{n-1/2}\,dz\right\}, \quad (61)$$

где коэффициенты b_{2n+1} определяются формулой (45), а $\theta(x^*)$ — тэта-функция, $\theta(x^*)=1$ при $x^*\geqslant 0$ и $\theta(x^*)=0$ при $x^*<0$. Интегралы, входящие в (61), сравнительно просты и могут быть легко вычислены для различных функций $Q(\alpha)$.

В теории переноса излучения важную роль играют также определенные интегралы с бесконечными пределами, которые естественно получаются из (61):

$$J(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha(x))\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(2n+1)\int_0^1 Q(z)(1-z)^{n-1/2}\,dz. \quad (62)$$

Рассмотрим некоторые из функций, которые определяют ядра интегральных уравнений для функций источников, и связанные с ними интегралы. При этом будем пользоваться обозначениями, введенными в монографии [1].

Для интеграла от произвольной степени фойгтовской функции имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^m(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,b_{2n+1}\mathrm{B}\left(m+1,\; n+\frac{1}{2}\right), \quad (63)$$

где $\mathrm{B}(a,\; b)$ — бета-функция Эйлера. Для функций

$$M_k(\tau)=A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x)\exp(-\alpha(x)\tau)\,dx;$$

$$N_{km}(\tau)=A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x)\,E_m(\alpha(x)\tau)\,dx,$$

где $A=H(0,\; y)/\sqrt{\pi}$; τ — оптическая толщина; $E_m(\tau)$ — интегральная показательная функция, получаем:

$$M_k(\tau)=A\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(2n+1)\mathrm{B}\left(k+1,\; n+\frac{1}{2}\right)\Phi\left(k+1,\; k+n+\frac{3}{2};\; -\tau\right); \quad (64)$$

$$N_{km}(\tau)=2A\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)G_{23}^{21}\left(\tau\,\middle|\,\begin{matrix}-k,\; m\\ 0,\; m-1,\; -k-n-1/2\end{matrix}\right). \quad (65)$$

В последней формуле G_{qp}^{mn} — G-функция Мейера [11]. Из (64) при $k=1$ и $k=2$ получаются функция ослабления $M_1(\tau)$ и функция вклада $M_2(\tau)$. Величина $N_{21}(\tau)\equiv\mathscr{K}(\tau)$, как известно, определяет ядро интегрального уравнения для функции источников при плоской и сферической симметрии ($\mathscr{K}(\tau)$-ядро), тогда как функция $N_{12}(\tau)\equiv L(\tau)$ используется для изучения диффузии фотонов в крыльях спектральных линий при большой оптической толщине в центре линии [1]. Косинус-преобразование Фурье от $\mathscr{K}(\tau)$ ядра в интегральном виде приведено (с точностью до множителя) в [1] (V-функция). Оно может быть легко вычислено в виде ряда, если при вычислении интегралов в (62) воспользоваться методом интегральных преобразований Меллина:

$$V(u)=\int\limits_{0}^{\infty} K(\tau)\cos\tau u d\tau=\frac{1}{u}A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{u}{\alpha(x)}\right]dx=$$

$$=\frac{A}{u}\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\frac{\Gamma(n+3/2)}{2^{n+1/2}}G_{44}^{32}\left(u^2\left|\begin{matrix}1/2,\ 1,\ n/2+7/4,\ n/2+9/4\\ 1/2,\ 3/2,\ 2,\ 0\end{matrix}\right.\right). \qquad (66)$$

Аналогично может быть вычислена другая функция, которая играет важную роль в теории переноса излучения:

$$U(z)=A\frac{z}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\ln\frac{z\alpha(x)+1}{z\alpha(x)-1}dx=$$

$$=\pi zA\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\left\{G_{33}^{21}\left(-\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1,\ 1/2,\ n+7/2\\ 0,\ 3,\ -1/2\end{matrix}\right.\right)-G_{33}^{21}\left(\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1,\ 1/2,\ n+7/2\\ 0,\ 3,\ -1/2\end{matrix}\right.\right)\right\}. \qquad (67)$$

Укажем также формулу для эквивалентной ширины в модели атмосферы Шварцшильда—Шустера [15], которая имеет вид

$$W_\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\alpha(x)}{1+\tau\alpha(x)}dx=\tau\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}(2n+1)\,\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\ 2\right)\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(1,\ 2,\ n+\frac{5}{2};\ -\tau\right), \qquad (68)$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса [11].

Не представляют трудностей такие же расчеты интегралов для модели атмосферы Эддингтона, а также вычисления целого ряда других необходимых интегралов.

Отметим, наконец, что в однократные ряды этого типа могут быть также разложены интегралы более сложного вида:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q(\alpha(x))\,\varphi(x)\,dx, \qquad (69)$$

где $Q(\alpha(x))$ и $\varphi(x)$ — произвольные функции, такие, что интеграл (69) сходится. Для этого удобно использовать разложение для $Q(\alpha)$ типа (35), причем выбрать в качестве $g(x)$ такие функции, чтобы почленные интегралы легко вычислялись, например функции (41а) или (42а).

Таким образом, вычисление интегралов типа (60), (62) или (69) сводится к вычислению рядов хорошо изученных специальных функций, что полезно не только при численных расчетах, но и при аналитическом изучении свойств этих интегралов.

Полученные результаты могут быть использованы при аналитическом исследовании широкого круга проблем в теории переноса излучения.

Литература

1. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., «Наука», 1969.
2. Armstrong B. H. Spectrum line profiles: The Voigt function. — J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer., 7, 61—88, 1967.
3. Hummer D. G. The Voigt function. An eight-significant table and generation procedure. — Mem. Roy. Astron. Soc., 78, 1—12, 1965.

4. Ф а д е е в а В. Н., Т е р е н т ь е в Н. М. Таблицы величин функции $w(z) = e^{-z^2}\left(1 + 2\frac{i}{\pi}\int_0^z e^{t^2}dt\right)$ для комплексного аргумента. М., Вычислительный центр АН СССР, 1954.
5. M i t c h e l l A. G., Z e m a n s k y M. W. Resonance radiation and excited atoms. Cambridge, Univ. Press, 1934.
6. H j e r t i n g F. Tables facilitating of the calculation of the line absorption coefficient. — Astrophys. J., 88, 508—516, 1938.
7. P e n n e r S. S. Quantitative molecular spectroscopy and gas emissivities. Chap. 4., Addison-Wesley, Reading Mass., 1959.
8. H a r r i s D. L. III. On the line absorption coefficient due to Doppler effect and damping. — Astrophys., J. 108, 112—115, 1948.
9. P l a s s G. N., F i v e l D. I. Influence of Doppler effect and damping on line-absorption coefficient and atmospheric radiative transfer. — Astrophys., J. **117**, 225—233, 1953.
10. К а у л и Ч. Теория звездных спектров. М., «Мир», 1974.
11. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М., «Наука», 1974.
12. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Т. 1. М., «Наука», 1973.
13. М и л л е р Дж. Ч. П. Таблицы функций Вебера. М., Вычислительный центр АН СССР, 1968.
14. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
15. С о б о л е в В. В. Курс теоретической астрофизики. М., «Наука», 1967.